

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

BÁRBARA COTRIM DE ARAÚJO

**ANÁLISE PRELIMINAR DE SISTEMAS NÃO
LINEARES: ESTUDO DE CASOS**

**VIÇOSA
2010**

BÁRBARA COTRIM DE ARAÚJO

**ANÁLISE PRELIMINARES DE SISTEMAS NÃO
LINEARES: ESTUDO DE CASOS**

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal de Viçosa, para a obtenção dos créditos da disciplina ELT 490 - Monografia e Seminário e cumprimento do requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. M.Sc. Alexandre S. Brandão.

VIÇOSA
2010

BÁRBARA COTRIM DE ARAÚJO

**ANÁLISE PRELIMINAR DE SISTEMAS NÃO LINEARES:
ESTUDO DE CASOS**

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal de Viçosa, para a obtenção dos créditos da disciplina ELT 490 - Monografia e Seminário e cumprimento do requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 03 de dezembro de 2010.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. M.Sc. Alexandre Santos Brandão - Orientador
Universidade Federal de Viçosa

Prof. Dr. José Carlos Costa Campos - Membro
Universidade Federal de Viçosa

Prof. Dr. André Gomes Torres - Membro
Universidade Federal de Viçosa

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pois sem Ele, nada seria possível e não estaríamos aqui reunidos, desfrutando, juntos, destes momentos que nos são tão importantes.

Aos meus pais Bomfim e Laura, pelo esforço, dedicação e compreensão, em todos os momentos desta e de outras caminhadas.

Ao meu namorado Leonardo que sempre esteve presente apoiando esta minha trajetória.

Em especial, ao meu orientador Alexandre Brandão, pois sua ajuda e paciência foram essenciais para conclusão deste trabalho.

Agradecimentos

Agradeço ao meu Orientador Prof. M.Sc. Alexandre Santos Brandão pelo incentivo, simpatia e presteza no auxílio às atividades e discussões sobre o andamento desta Monografia de Conclusão de Curso, pois sem a sua ajuda não teria conseguido concluir tão bem este trabalho.

Aos demais idealizadores, coordenadores e funcionários da Universidade Federal de Viçosa - Minas Gerais.

A todos os professores pelo carinho, dedicação e entusiasmo demonstrado ao longo do curso.

Aos colegas de classe pela espontaneidade e alegria na troca de informações e materiais numa rara demonstração de amizade e solidariedade. Em especial, à Elaine, ao Rosembergue, ao Rodrigo e à Elizandra, por estarem sempre ao meu lado durante todo o período do curso, me apoiando e incentivando nos momentos difíceis e compartilhando dos momentos felizes.

Ao meu namorado pelo seu companheirismo, paciência e carinho, estando sempre me apoiando.

À minha família, meus pais, Bomfim e Laura, e aos meus irmãos, Bianca e Bianor, pela paciência em tolerar minha ausência, e me dar forças para ir atrás dos meus sonhos.

E, finalmente, a DEUS pela oportunidade e pelo privilégio que me foi dado de realizar o curso de Engenharia Elétrica na Universidade Federal de Viçosa.

“Viva! Bom mesmo é ir à luta com determinação, abraçar a vida com paixão, perder com classe e vencer com ousadia, porque o mundo pertence a quem se atreve e a vida é

”muito”pra ser insignificante”.

(Charles Chaplin)

Resumo

Este trabalho apresenta uma abordagem estritamente teórica da análise de sistemas não lineares. Estudos de casos de algumas características destes sistemas encontrados em sistemas reais, tais como, histerese, zona morta e saturação, são simulados e discussões pertinentes ao tema são apresentadas. Por fim, algumas aplicações destes sistemas são correlacionas às disciplinas estudadas durante o curso de Engenharia Elétrica da UFV.

Abstract

This work presents an approach strictly theoretical of analysis of nonlinear systems. Some case studies of the features of these systems found in real systems are simulated, such as hysteresis, dead zone and saturation. In the sequel, discussions relevant to the theme are presented. Finally, some applications of these systems are correlated with the subjects studied during the course of Electrical Engineering at UFV.

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	10
1.1	Sistemas Lineares <i>versus</i> Não Lineares	11
1.2	Objetivo geral do trabalho	15
2	Características de Sistemas Não Lineares	16
2.1	Sistema Zona Morta	16
2.2	Histerese	18
2.3	Sistema Liga-Desliga	20
2.4	Saturação	22
3	Simulações e Análises	25
3.1	Sistemas dinâmicos com comportamento quadrático	25
3.2	Sistema Pêndulo Simples	27
3.3	Sistema Zona Morta	27
3.4	Oscilador de Van der Pol	29
4	Considerações Finais	32
	Referências	34

Lista de Figuras

1	Teorema da Superposição.	11
2	Sistemas Lineares. Raízes complexas conjugadas.	13
3	Sistemas Lineares. Raízes reais	13
4	Sistemas Lineares. Condições adicionais.	14
5	Pêndulo simples e sua representação de estabilidade	14
6	Pêndulo Simples.	15
7	Características de Zona Morta.	17
8	Rodas dentadas e as variáveis de posição θ_1 e θ_2	17
9	Gráfico θ_1 e θ_2	18
10	Gráfico θ_2 por θ_1 [1].	18
11	Característica da histerese em torno de $u = 0$	19
12	Característica da histerese em torno de P	20
13	Característica ideal da histerese com saturação.	20
14	Característica do tipo Liga-Desliga.	21
15	Característica do tipo Liga-Desliga com Histerese.	21
16	Sistema de um aquecedor.	22
17	Característica da Saturação.	23
18	Característica da Saturação Ideal.	23
19	Sistema Quadrático.	26
20	Resposta do sistema pêndulo simples para distintos valores de condição inicial.	28
21	Gráfico de convergência no plano $\theta\dot{\theta}$	29

22	Análise do Sistema Zona Morta.	29
23	O sistema de controle simulado.	30
24	Resposta do sistema no plano $x\dot{x}$	30
25	Representação no plano $x\dot{x}$	31

1 *Introdução*

Segundo a literatura, sistemas lineares são conhecidos como aqueles que respeitam o teorema da superposição, isto é, os efeitos de múltiplas entradas pode ser analisado pela soma destes efeitos individualmente. Ou ainda, a resposta ponderada de um sistema T a duas entradas u_1 e u_2 pode ser tratada por

$$T[a_1u_1(t) + a_2u_2(t)] = a_1T[u_1(t)] + a_2T[u_2(t)]. \quad (1.1)$$

Sistemas que não seguem a esta regra são ditos não lineares. Isto porque em sua composição, algum componente ou subsistema apresenta alguma característica não linear, tais como, atrito de Coulomb, saturação, zona-morta, folga, histerese, dentre outras [2].

Os sistemas físicos encontrados na natureza são intrinsecamente não lineares. Entretanto, se estas não linearidades são suaves em um sistema cuja faixa de operação é pequena a ponto de atingir esta tais zona não lineares, um modelo linear aproximado pode ser feito para representá-lo e técnicas clássicas de análises de sistema e de projeto de controladores podem ser aplicadas [3].

De forma similar aos sistemas lineares, os sistemas não lineares apresentam um dado comportamento de saída mediante um sinal de excitação na entrada. Porém, métodos convencionais lineares de predição do comportamento da saída não podem ser aplicados a este sistemas, pois os seus parâmetros intrínsecos e zonas de funcionamento influenciam diretamente na sua resposta. Neste contexto, torna-se imprescindível a aplicação de métodos de análise a classes restritas de não-linearidades, as quais se estendem aos métodos clássicos quando tais efeitos não são considerados [4].

Comumente, sistemas não lineares são abordados através de seus modelos linearizados, em outras palavras, são sistemas cujo funcionamento é realizado na vizinhança de um ponto de operação previamente conhecido. Contudo, o desempenho destes sistemas depende diretamente de sua dinâmica, uma vez que fora das condições especificadas, tanto a estabilidade quando a fidelidade não é garantida [5].

Em um sistema físico (ou matemático), as não-linearidades podem ser classificadas como inerentes ou intencionais. A primeira delas existe naturalmente nos sistemas e são causadas por efeitos indesejáveis, os quais devem ser compensados, tais como, saturação, zona-morta, histerese, folga, atrito estático, atrito de Coulomb, mola não-linear, compressibilidade de um fluido, dentre outros. Por outro lado, aquelas intencionais são introduzidas em um sistema para melhorar seu desempenho ou simplificar sua construção, como, por exemplo, a operação de um sistema por relés.

Assim sendo, para prever o comportamento de sistemas sujeitos a não linearidades, métodos de análise específicos devem ser considerados na análise de estabilidade e controle, visando evitar situações de instabilidade ou de oscilação permanente (ciclos-limite) [5].

Embora trabalhar com sistemas não lineares seja uma tarefa dispendiosa, existem inúmeras razões para seu estudo, sendo a principal delas, a melhoria no desempenho de controladores contemplando descontinuidades e saturação. Exemplos corriqueiros são controle de temperatura através de saltos de bancos de resistências e controle de vazão através de válvulas que apresentam limites mínimos e máximos de fluxo de fluido.

O controle não-linear diz respeito à análise e ao projeto de controle de sistemas não-lineares, isto é, sistemas de controle contendo ao menos um componente não-linear, que inviabilize o processo de linearização e/ou a aplicação do teorema da superposição. Similar a um sistema linear, o objetivo de controle para uma planta não-linear é atingir um valor desejada em um tempo predefinido (ou não) atendendo um conjunto de requisitos previamente estabelecidos [2].

1.1 Sistemas Lineares *versus* Não Lineares

A Figura 1 ilustra um sistema qualquer S sujeito a uma excitação de entrada $u(t)$ e resultando em uma resposta $y(t)$, função das características deste sistema.



Figura 1: Teorema da Superposição.

Caso este sistema apresenta características lineares em toda sua faixa de operação, pode-se concluir que o mesmo irá apresentar apenas um único ponto de equilíbrio. Considerando este sistema na forma $\dot{x} = Ax$, o único ponto de equilíbrio será dado por $\dot{x} = 0$ e

$\bar{x} = 0$. Em outras palavras, se o sistema é inerentemente estável, para qualquer condição inicial distinta de zero, as variáveis irão convergir à zero em um tempo finito. Em uma análise no espaço de estados, a estabilidade do equilíbrio será dada por $|\lambda I - A| = 0$, cuja solução temporal é dada por $x(t) = x_0 e^{-At}$.

Tomando como exemplo um caso bidimensional, com $x \in R^2$, tem-se

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

onde A é uma matriz de transferência de dimensão 2×2 . O único ponto de equilíbrio deste sistema é $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ sendo, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$, cuja solução temporal é descrita por $x(t) = x_0 e^{-At}$. A estabilidade do equilíbrio é analisada de acordo com os valores de λ_1 e λ_2 , que são os autovalores do sistema, ou seja, as raízes do sistema.

A análise gráfica da resposta do sistema sujeito a distintas condições iniciais e a distintas combinações de λ_1 e λ_2 é descrita a seguir.

Primeiramente, considerando que λ_1 e λ_2 representam um par de raízes complexas conjugadas com parte real negativa, tem-se a resposta mostrada na Figura 25. Neste caso, o sistema apresenta um foco Estável para $\begin{cases} R_e(\lambda_1) < 0 \\ R_e(\lambda_2) < 0 \end{cases}$, e pode concluir que o sistema em questão é dissipativo. Em outras palavras, para as raízes com qualquer valor real menor que zero, dada uma condição inicial distinta de zero, o sistema libera energia até atingir o ponto de equilíbrio. Este movimento elíptico retrativo indica que o sistema apresenta características de um sistema sub-amortecido.

Tomando agora o mesmo par complexo conjugado, porém com parte real positiva, o foco será Instável, ou seja, para $\begin{cases} R_e(\lambda_1) > 0 \\ R_e(\lambda_2) > 0 \end{cases}$, ele absorve/gera energia saindo fora do seu ponto de equilíbrio, tornando-se instável. A Figura 2(b) ilustra tal situação.

Outra situação de nó estável ocorre para valores de raízes reais negativas, ou seja, $\begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{cases}$. Nestes casos, o sistema com estas características dissipam energia de forma sobre amortecida até atingir o ponto de equilíbrio, conforme mostrado na Figura 3(a).

A situação oposta ocorre para valores reais positivos das raízes, neste caso, vide Figura 3(b), o sistema se comporta de forma “fugir”do equilíbrio para $\begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$.

Duas outras situações podem ser abordadas, que se referem a raízes com valores

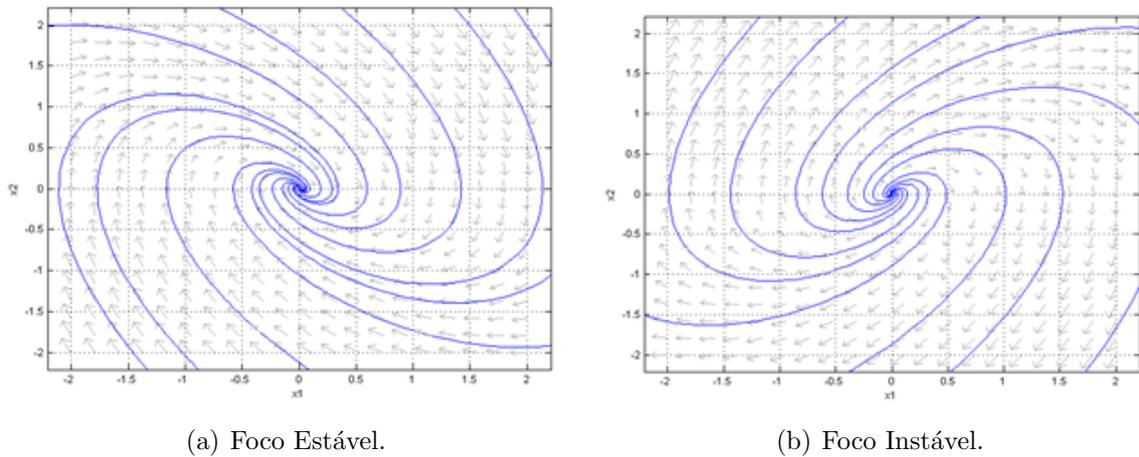


Figura 2: Sistemas Lineares. Raízes complexas conjugadas.

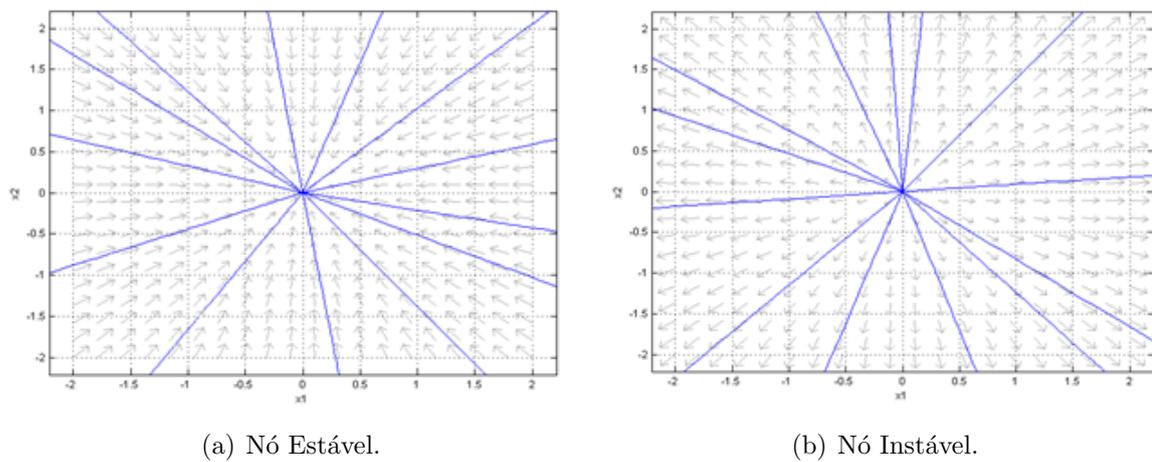


Figura 3: Sistemas Lineares. Raízes reais

reais de sinais opostos e raízes com valores imaginários puros, ilustradas nas Figuras 4(a) e 4(b), respectivamente. Na primeira delas, o sistema absorve energia afastando-se do ponto de equilíbrio devido à raiz real positiva enquanto é atraído pelo equilíbrio devido à raiz negativa. Como a resposta do sistema é dada no tempo, a raiz positiva domina a negativa, levando o sistema à instabilidade. Na segunda, para uma condição inicial distinta de zero, o sistema ganha energia até atingir uma elipse descrita plano descrito por $x - -\dot{x}$ e nela permanece indefinidamente.

Diferente dos sistemas lineares que possuem apenas um ponto de equilíbrio, os sistemas não lineares podem possuir múltiplos equilíbrios. Um exemplo típico é o caso de um pêndulo simples com amortecimento, representado por $\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + a \sin(\theta) = 0$, onde a é o comprimento do pendulo e b é o coeficiente de amortecimento. Adotando $\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases}$,

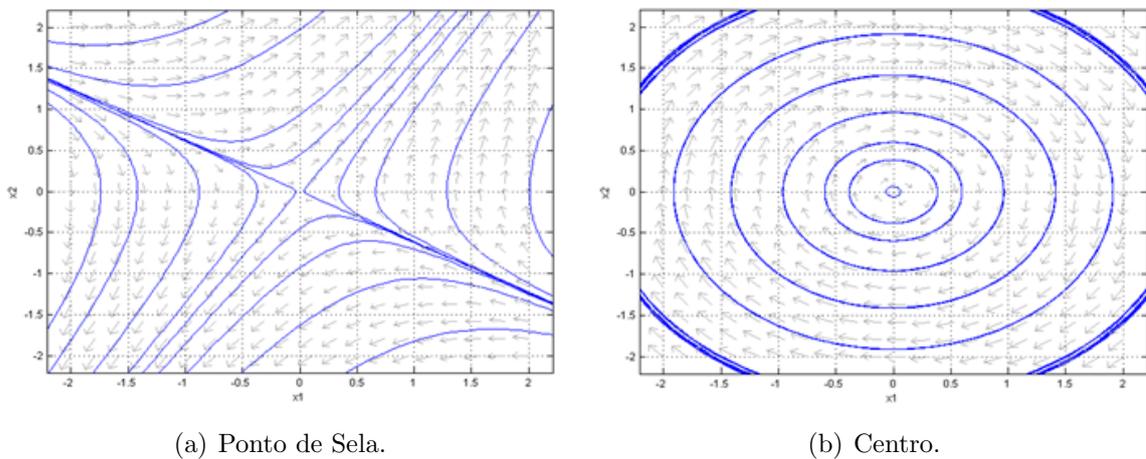


Figura 4: Sistemas Lineares. Condições adicionais.

tem-se que
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin(x_1) - bx_2 \end{cases}.$$

Vale comentar que se a análise de pequenas variações for considerada para o sistema de um pêndulo simples, é possível linearizá-lo localmente e representá-lo na forma $\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + a\theta = 0$, comumente para $-5^\circ \leq \theta \leq +5^\circ$. Daí, a análise anteriormente apresentada, pode ser realizada. Caso contrário, deverá ser feita uma análise mais aprofundada. Observando a equação de estado do sistema, para b igual a zero, tem-se o sistema na forma $\dot{x}_2 = -a \sin(x_1)$, cujos pontos de equilíbrio está localizado em $x_1 = 0$ ou $x_1 = n\pi$, onde $n \in \mathbb{N}$. Fisicamente, um pêndulo simples apresenta um equilíbrio estável e outro instável. Uma vez localizado no equilíbrio instável, qualquer energia adicionada ao sistema, ele sai em busca do equilíbrio estável. A Figura 5 ilustra tais situações.

Uma representação no plano $x - \dot{x}$, pode ser vista na Figura 20, para os casos de $b = 0$, onde o sistema é oscilatório, sem amortecimento, e para $b > 0$ indicando que ao sair do equilíbrio instável, o sistema converge para o equilíbrio estável.

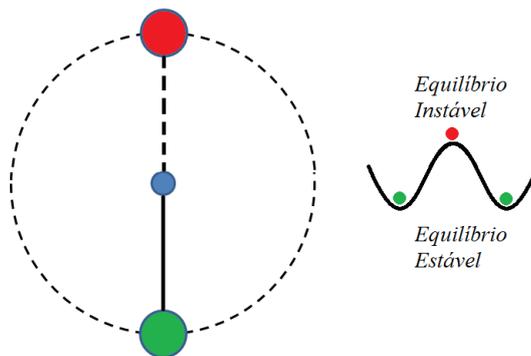


Figura 5: Pêndulo simples e sua representação de estabilidade

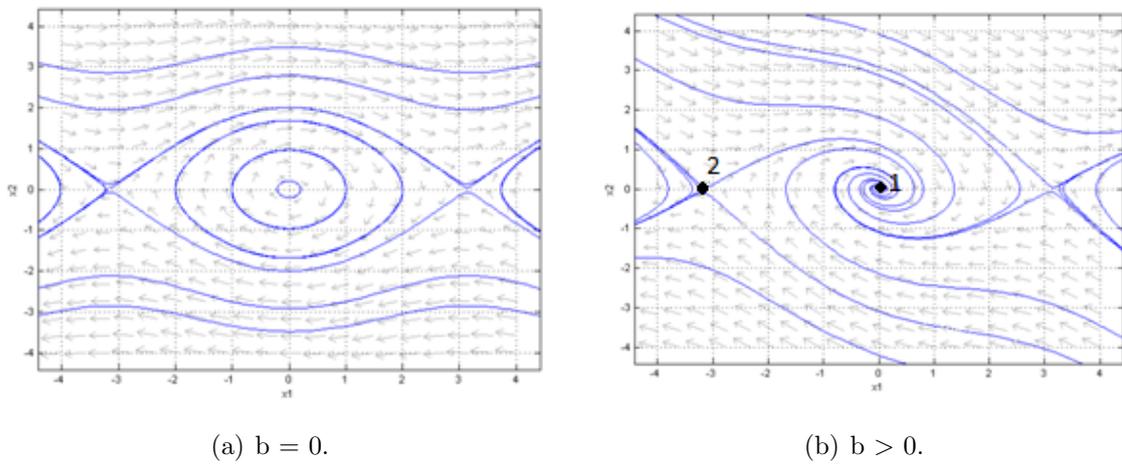


Figura 6: Pêndulo Simples.

1.2 Objetivo geral do trabalho

Este trabalho tem como objetivo, apresentar os conceitos preliminares dos sistemas não lineares, enfatizando as características físicas típicas encontradas em sistemas de controle, tais como zona-morta, histerese, liga-desliga e saturação. A análise destes sistemas contempla o estudo de casos aqui proposto.

2 *Características de Sistemas Não Lineares*

Neste capítulo serão apresentadas as não linearidades comumente encontradas em situações reais de controle e que afetam diretamente o desempenho dos sistemas nos quais estão inseridas, quando não são devidamente tratadas.

2.1 Sistema Zona Morta

A não-linearidade de zona-morta é um fenômeno comumente encontrado em sistemas de controle que envolvem atuadores do tipo servo-válvulas hidráulicas ou servomotores DC, que necessitam o acoplamento por engrenagens.

Normalmente, a zona morta é utilizada intencionalmente em sistemas de controle para enviar um sinal nulo do controlador para o atuador, quando a saída daquele é pequena, visando aumentar o tempo de vida de determinado tipo de equipamentos mecânicos.

Entretanto, a presença deste elemento em uma malha de controle pode degradar o desempenho do controlador, podendo inclusive levar ao aparecimento de ciclos-limites no sistema em malha-fechada [6]. Vale comentar que ciclos limite são às oscilações que podem se estabelecer com amplitude, frequência e forma bem definidas, sem que o sistema esteja sujeito a qualquer solicitação externa. A zona-morta, por sua vez, pode causar estas oscilações através de perturbações ou ruídos.

A zona morta é classificada como Tipo I e II, conforme mostrado na Figura 7.

A zona morta Tipo I indica a situação onde o sistema só apresenta resposta válida com um certo valor distinto de zero após um certo limiar de módulo também superior a zero. Isto pode ser compreendido como a folga de uma engrenagem e é expressa por

$$y = \begin{cases} 0, & |u| \leq Z_M \\ u, & |u| > Z_M \end{cases} . \quad (2.1)$$

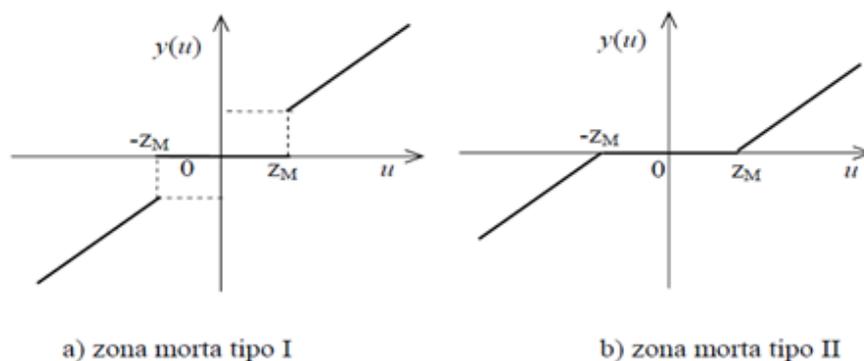


Figura 7: Características de Zona Morta.

Por sua vez, a zona morta Tipo II expressa por

$$y = \begin{cases} u + Z_M, u < -Z_M \\ 0, -Z_M \leq u \leq Z_M \\ u - Z_M, u > Z_M \end{cases}, \quad (2.2)$$

é aquela não linearidade proposital, inserida para polpar a ação de atuadores na presença de pequenos valores de sinal de controle.

Como exemplo desta não linearidade, toma-se um sistema mecânico constituído por duas rodas dentadas com uma folga igual a α . A roda motriz descreve um movimento alternado em rampa, sinal triangular, com uma frequência f e uma amplitude compreendida entre α_1 e α_2 . Designa-se por θ_1 a posição da roda motriz e por θ_2 a da roda acionada. Admitindo que no instante inicial $\theta_1 = 0$ e que a folga se encontra meio vencida. O desenho das rodas dentadas e as variáveis de posição θ_1 e θ_2 estão representadas na Figura 8.

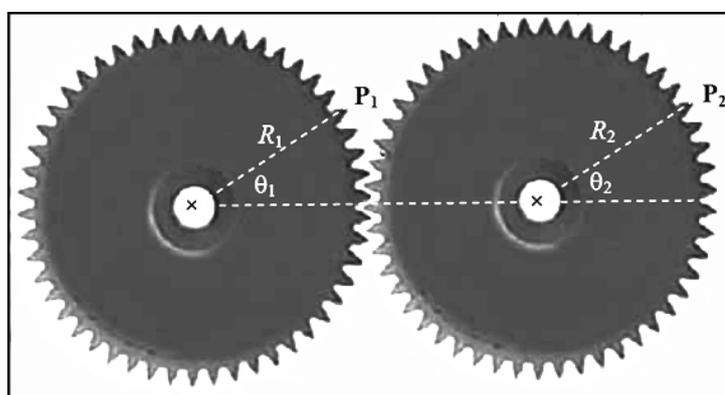


Figura 8: Rodas dentadas e as variáveis de posição θ_1 e θ_2 .

Considerando, $\theta_1 = \theta_1(t)$ e $\theta_2 = \theta_2(t)$ são função do tempo e que a folga α é fixa. Dada as condições iniciais de $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 0$, e supondo que $R_1 = R_2$, pode fazer-se a seguinte representação gráfica ilustrada na Figura 9.

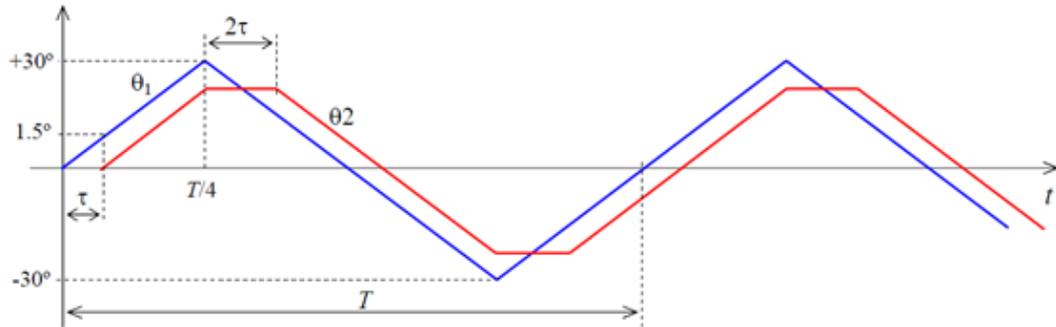


Figura 9: Gráfico θ_1 e θ_2 .

Como conclusão deste sistema, tem-se que um atraso τ entre a transmissão de torque de uma roda dentada para a outra, o que caracteriza a não linearidade. Vale comentar que este valor não é fixo durante toda a revolução, como pode ser visto na Figura 9.

Uma representação da característica entrada-saída $\theta_2\theta_1$ está na Figura 10.

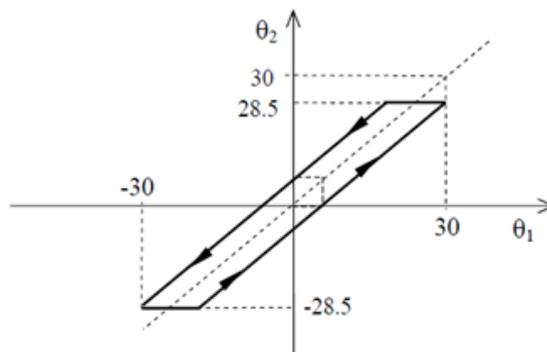


Figura 10: Gráfico θ_2 por θ_1 [1].

2.2 Histerese

O conceito de histerese está ligado a sistemas não lineares onde o comportamento depende tanto do estado de solicitação atual quanto de sua história passada. Este tipo de fenômeno é tratado nas áreas que relacionam magnetismo, elasticidade, plasticidade, sistemas de spins, oscilações em redes cristalinas, etc.

A sua característica fundamental consiste na existência de curvas, relacionando a sollicitação (força, tensão, etc.) com a resposta do sistema (deslocamento, deformação, etc.), que dependem da história passada do sistema e que formam ciclos fechados quando a sollicitação varia contínua e periodicamente com amplitude suficientemente grande. Em outras palavras, quando se faz a sollicitação variar ciclicamente, o sistema responde de modo que o aspecto do gráfico resposta versus sollicitação é uma curva fechada, onde o caminho seguido durante o carregamento (aumento na sollicitação) não coincide com o do descarregamento [7]. A Figura 11 apresenta uma característica entrada-saída de um sistema com histerese, admitindo que a entrada varia de $-u_M$ a $+u_M$.

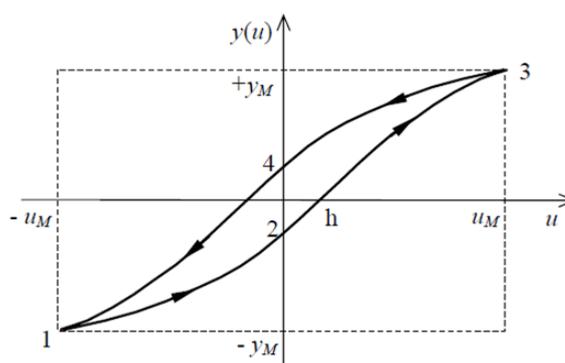


Figura 11: Característica da histerese em torno de $u = 0$.

Matematicamente, a histerese é uma não linearidade, cuja descrição analítica é um pouco mais complicada do que as anteriores devido a necessidade do conhecimento do histórico do sinal de entrada. Tomando como exemplo a Figura 11, supondo que a entrada u é sinusoidal de amplitude u_M , quando u varia de $-u_M$ a $+u_M$ (ramo crescente de u), y varia de $-y_M$ a $+y_M$ seguindo a curva 1, 2, 3. Quando u diminui, de $+u_M$ a $-u_M$, y varia de $+y_M$ a $-y_M$ seguindo o ramo 3, 4, 1. A dificuldade na definição matemática encontra-se na dependência da amplitude do sinal de entrada e do ponto de funcionamento. Assim, se para um sistema que exhibe a curva de histerese da Figura 11, a função $u(t)$ diminuir de amplitude no momento em que se encontrava no ponto P , a curva de histerese muda, tomando o aspecto indicado na Figura 12.

De uma forma simplista, é costume representar a histerese em torno de $u = 0$ associada à saturação linear, como indicado no diagrama ideal da Figura 13, onde se admite que a

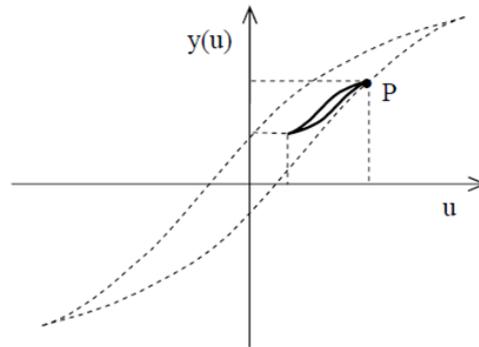


Figura 12: Característica da histerese em torno de P .

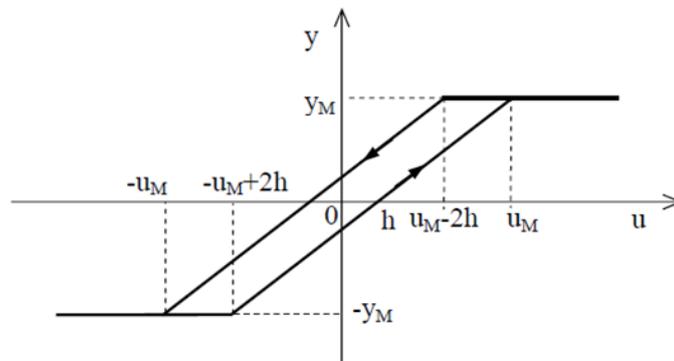


Figura 13: Característica ideal da histerese com saturação.

amplitude de u é igual a $|u_M|$ e seu crescimento/descrescimento e resposta é descrito por

$$y = \begin{cases} -y_M, u < -u_M + 2h \\ u - h, -u_M + 2h \leq u \leq u_M \\ y_M, u > -u_M \end{cases} \quad \text{Ramo crescente} \quad (2.3)$$

$$y = \begin{cases} y_M, u > u_M - 2h \\ u + h, -u_M \leq u \leq u_M - 2h \\ -y_M, u < -u_M \end{cases} \quad \text{Ramo decrescente} \quad (2.4)$$

2.3 Sistema Liga-Desliga

Tais sistemas são utilizados em plantas que possuem um controle de apenas dois estados: liga e desliga. O objetivo na utilização deste sistema é fazer com que as variáveis de saída não linear se aproximem de uma determinada referência e estabilizem numa

vizinhança do seu valor. Para realizar este controle, uma realimentação na saída é utilizada para gerar um sinal de controle que vai atuar sobre o processo. Este sistema é descrito por

$$y = \begin{cases} y = -1, u < 0 \\ y = 0, u = 0 \\ y = 1, u > 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

e é comumente encontrado em plantas de baixo custo de controle de temperatura e de pressão, que consistem na abertura e no fechamento de válvulas de forma abrupta. A Figura 14 ilustra seu comportamento.

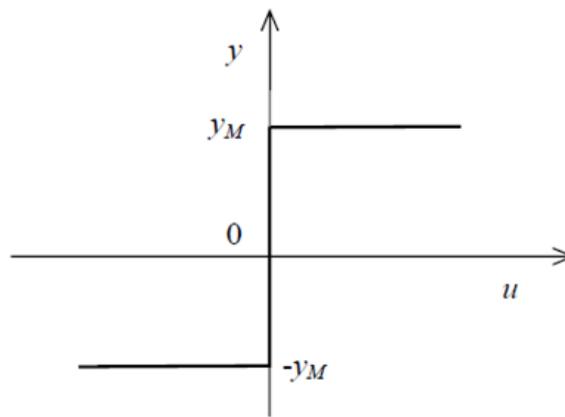


Figura 14: Característica do tipo Liga-Desliga.

Este tipo de sistema comumente é associado à histerese, acrescentando ao sistema um tempo morto de ajuste do intervalo o ligar e desligar, a fim de aumentar a vida útil da planta. Esta característica pode ser observada Figura 15.

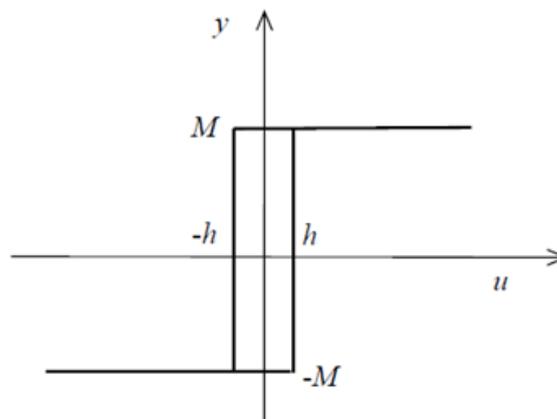


Figura 15: Característica do tipo Liga-Desliga com Histerese.

Como exemplo de um sistema liga-desliga, pode-se citar um aquecedor de ar de controle em circuito fechado, onde a entrada do sistema é um valor de temperatura desejado e a saída é a habilitação ou não de um aquecedor. Neste sistema, caso a temperatura esteja abaixo do desejado, o sistema liga e a temperatura ambiente começa a ser aquecida. Ao atingir uma temperatura acima da desejada, é aplicada uma ação de controle para desligar o aquecedor e esperar que a dinâmica do sistema reduza a temperatura. Neste sentido, assim que a temperatura atinge um valor inferior ao desejado, o aquecedor é religado e o processo reinicia. Através desse sistema liga e desliga o controlador mantém a temperatura variando próxima do valor desejado.

Entretanto, ao aproximar do valor de entrada desejado, o aquecedor irá ligar e desligar com um intervalo de tempo muito pequeno, e com isso a vida útil do aparelho fica comprometida. Este fenômeno é conhecido como efeito *chattering*, ou ainda, efeito de múltiplos chaveamentos. Uma alternativa, como mencionado anteriormente, para obter um equilíbrio na temperatura e aumentar a vida útil do aquecedor, é através da associação de sistema liga desliga à histerese, de forma a ter uma zona morta no intervalo entre ligar e desligar o aquecedor. A Figura 16 ilustra a resposta deste sistema.

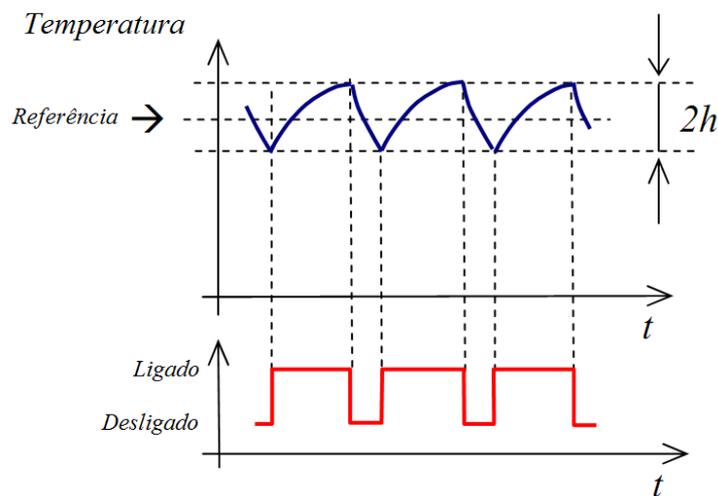


Figura 16: Sistema de um aquecedor.

[1]

2.4 Saturação

Outra característica estática típica de muitos sistemas físicos é a saturação. A Figura 17 ilustra este fenômeno, que ocorre para elevados valores de uma entrada $|u|$, que o

sistema não é capaz de responder de forma proporcional, ou seja, de forma linear. Sistemas com estas características apresentam valores supremos de controle, onde $\Delta y/\Delta u \approx 0$. Em outras palavras, independente da excitação de entrada, acima de um certo valor crítico, a saída do sistema será limitada por uma cota superior (ou inferior), indicando, portanto, que o sistema se encontra saturado.

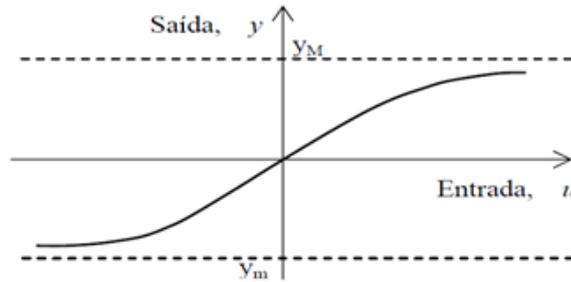


Figura 17: Característica da Saturação.

A saturação mostrada na Figura 17 pode ser idealizada na forma apresentada na Figura 18, é descrita analiticamente por

$$y = \begin{cases} y_m, u < u_m \\ ku + c, u_m \leq u \leq u_M \\ y_M, u > u_M \end{cases}, \quad (2.6)$$

onde y_m e y_M indicam os limites máximo negativo e positivo de saída do sistema, respectivamente. Vale comentar que saturações neste formato apresentam uma região linear definida no intervalo $u_m \leq u \leq u_M$, onde u_m e u_M representam a entrada máxima negativa e positiva da região linear, respectivamente.

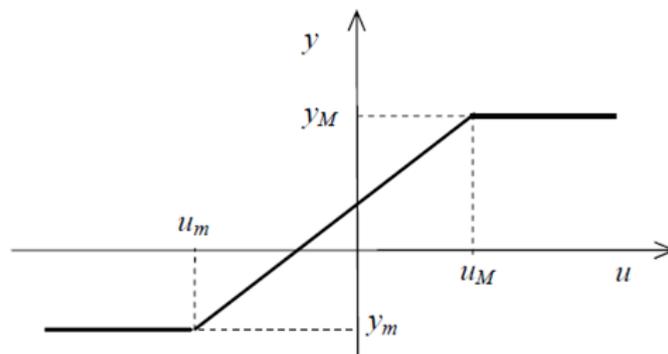


Figura 18: Característica da Saturação Ideal.

Este tipo de saturação é muito corrente em dispositivos de controle industrial, como, por exemplo, o sinal de controle de abertura de uma válvula analógica, cuja saída está compreendida no intervalo entre 0 e 100%. Comumente, para evitar a saturação física dos dispositivos, adota-se saturadores nas estratégias de controle, de modo a introduzir uma saturação nos sinais de controle para evitar danos ao dispositivo a controlar.

Esta característica também encontra-se presente na área de eletromagnetismo, como, por exemplo, em máquinas elétricas, no que diz respeito à corrente elétrica e ao campo magnético por ela criado. Neste caso a curva de saturação aparece normalmente associada a uma outra não linearidade já apresentada, a histerese. Outro exemplo típico, é a curva de resposta de um transistor excitado por um sinal de entrada, a corrente de emissor i_e drenada pelo dispositivo é proporcional à corrente de base i_b por um parâmetro β . Entretanto, a partir de um certo limiar, não importa o valor de i_b , i_e se manterá constante, indicando que o limite físico do dispositivo foi atingido, isto é, o dispositivo entrou em estágio de saturação [8].

3 *Simulações e Análises*

Dado as não linearidades apresentadas anteriormente, o presente capítulo visa ilustrar e discutir por meio de simulações, o comportamento destas em diferentes sistemas de controle, enfatizando a importância de sua análise, quando se deseja verificar a estabilidade destes sistemas.

3.1 **Sistemas dinâmicos com comportamento quadrático**

A definição de derivada da função x em tempo contínuo é dada por

$$\dot{x}(x) = \frac{(f(x+h) - f(x))}{h}, \quad (3.1)$$

cuja representação discreta é dada por

$$\dot{x}(k) = \frac{(x(k+1) - x(k))}{\Delta t} \quad (3.2)$$

onde Δt é o período de amostragem.

Para exemplificar sistemas com características quadráticas, considera-se a equação dinâmica expressa no tempo contínuo por

$$\dot{x} + x - x^2 = 0,$$

cuja representação discreta é

$$\dot{x}[k] = -x[k] + x^2[k]$$

ou ainda, na forma de equação de diferenças, tem-se $x[k+1] = \dot{x}[k]\Delta t + x[k]$.

Considerando que o estado de repouso deste sistema, tem-se, portanto, que, para $\dot{x} = 0$, $x^2 - x = 0$, cujos pontos de equilíbrio são $x = 0$ e $x = 1$. Como pode-se perceber, este sistema apresenta dois pontos de estabilidade, resta, porém, analisar quais destes

ponto de estabilidade é inerentemente estável. Neste sentido, há que analisar as condições iniciais do sistema. Primeiramente, para situações onde o sistema se encontra sobre o ponto de equilíbrio, ali ele irá permanecer até que alguma ação externa o retire de uma situação de repouso. Por sua vez, caso o sistema se encontre em uma condição inicial distinta do ponto de equilíbrio, o comportamento do sistema deve ser analisado de forma peculiar.

Para o sistema apresentado em (3.1), caso a condição inicial seja $x(0) > 1$, o sistema apresenta-se instável, tendendo ao infinito. Em outras palavras, o sistema adquire energia excitando sua dinâmica interna. Por outro lado, para condições iniciais $x(0) < 1$ com $x \neq 0$, o sistema é estável, convergindo ao ponto de equilíbrio $x = 0$ em um tempo infinito. Isto mostra que o sistema em questão apresenta um ponto de equilíbrio atrativo $x = 0$ e outro repulsivo $x = 1$.

Um parâmetro interessante a ser determinado neste sistema refere-se ao tempo de escape, isto é, o instante de tempo no qual o sistema irá explodir (colapsar, apresentar uma resposta infinita). Este valor pode ser determinado por $t_{esc} = \ln \frac{x_0}{x_0 - 1}$ e para o sistema em questão o tempo de escape foi de aproximadamente 4,6s. A Figura 19(a) ilustra esta situação de instabilidade.

O sistema proposto foi simulado no MatLab com distintas condições iniciais. Especificamente: $x(0) = [-3 \ 0 \ 0.2 \ 0.9 \ 1 \ 1.01]^T$. A Figura 19(a) apresenta a resposta do sistema dado as cinco primeiras condições iniciais. Como pode-se verificar, o sistema converge para $x = 0$ durante a evolução temporal. A Figura 19(b) mostra o comportamento do sistema para a condição inicial $x(0) > 1$ e é possível verificar que o sistema colapsa, não podendo ser controlado.

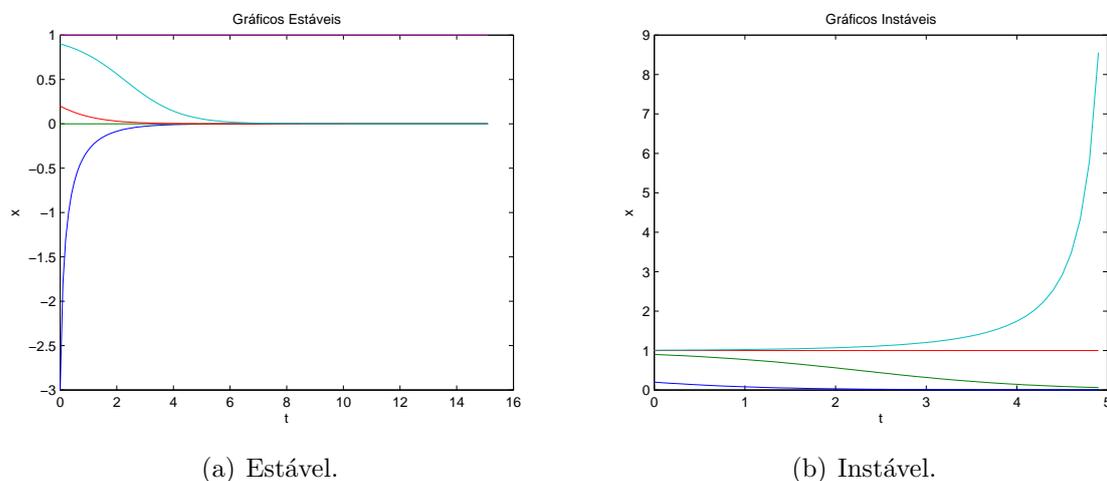


Figura 19: Sistema Quadrático.

Vale comentar que somente a resposta natural deste sistema está sendo analisada, entretanto é importante salientar que durante o projeto de um controlador, deve-se levar em consideração que para acima de certos valores críticos da variável de estado do sistema (neste caso, $x(t) > 1$), o sistema se torna instável, não sendo passível de controle

3.2 Sistema Pêndulo Simples

Considerando-se a equação no tempo contínuo de um pêndulo simples dada por

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + a \sin(\theta) = 0, \quad (3.3)$$

onde a é o comprimento da haste do pêndulo e b é um parâmetro de amortecimento. A representação deste sistema no espaço de estados é dada por

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin(x_1) - bx_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Por sua vez, no tempo discreto, este sistema pode ser expresso por

$$\frac{\dot{x}[k+1] - \dot{x}[k]}{\Delta t} + b \frac{x[k+1] - x[k]}{\Delta t} + a \sin(x[k]) = 0, \quad (3.5)$$

e sua resposta pode ser analisada por simulação computacional. Após algum algebrismo, tem-se a equação de diferenças do sistema dada por

$$x[k+2] = 2x[k+1] - x[k] - b(x[k+1] - x[k])\Delta t - a \sin(x[k])\Delta t^2 \quad (3.6)$$

Recordando que o sistema pêndulo invertido apresenta dois pontos de estabilidade (pontos de equilíbrio), sendo um atrativo ($\theta = 2n\pi$, para $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$) e outro repulsivo ($\theta = (2n+1)\pi$ para $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$), a Figura 20 apresenta a estabilização do sistema para distintas condições iniciais.

A Figura 21 mostra o gráfico de x_1 por \dot{x}_1 , onde é possível visualizar os pontos de equilíbrio estáveis e instáveis.

3.3 Sistema Zona Morta

A simulação deste sistema foi feita utilizando o *Backlash* com largura de banda igual a 1, como pode ser visto na Figura 22 para uma condição inicial de $x(0) = 0$. Pelas

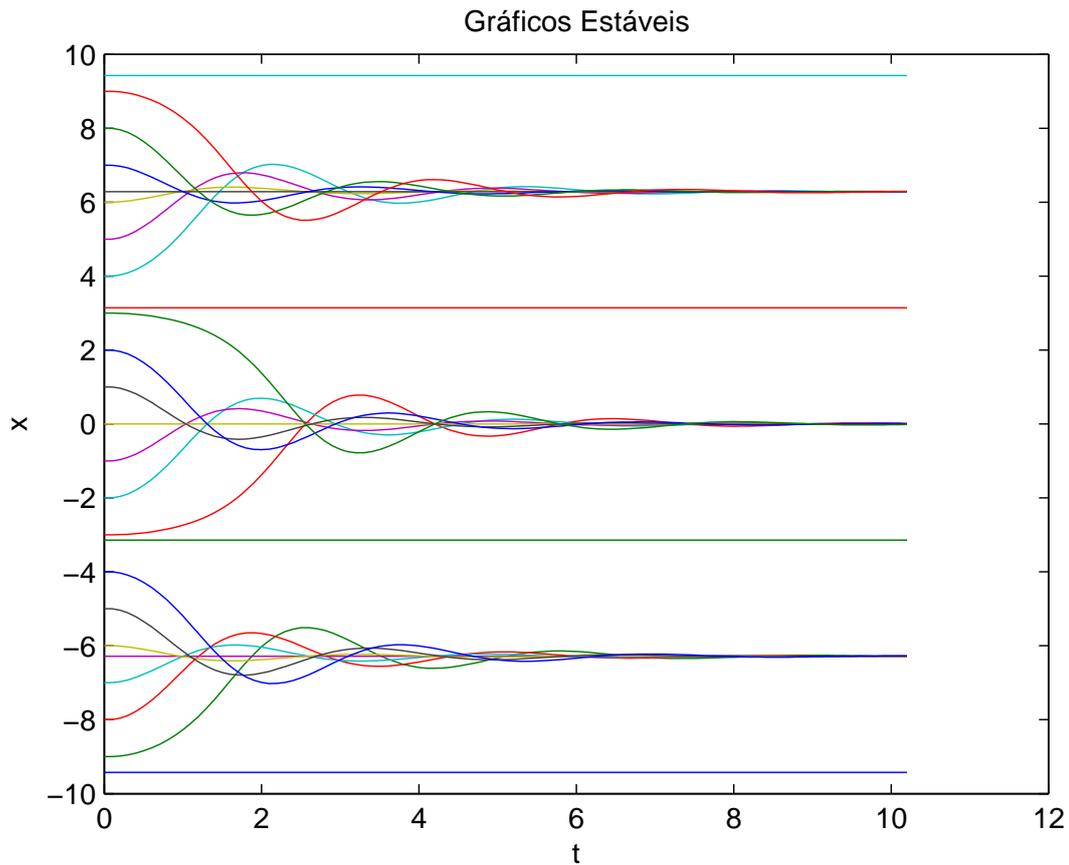


Figura 20: Resposta do sistema pêndulo simples para distintos valores de condição inicial.

características deste sistema apresentadas no Capítulo 2, durante seu funcionamento é possível verificar a existência de um ciclo limite, quando a resposta no plano $x\dot{x}$ é analisada. A Figura 24 ilustra este efeito.

Para efeitos de simulação, foi realizada uma resposta em degrau do sistema mostrado na Figura 23 durante os primeiros cinco segundos.

A resposta de entrada-saída do sistema no plano XY está representada nas Figuras 24, 24(b) e 24(c). As duas últimas figuras destacam ao processo de tendência do sistema ao ciclo limite nos instantes iniciais e finais da simulação.

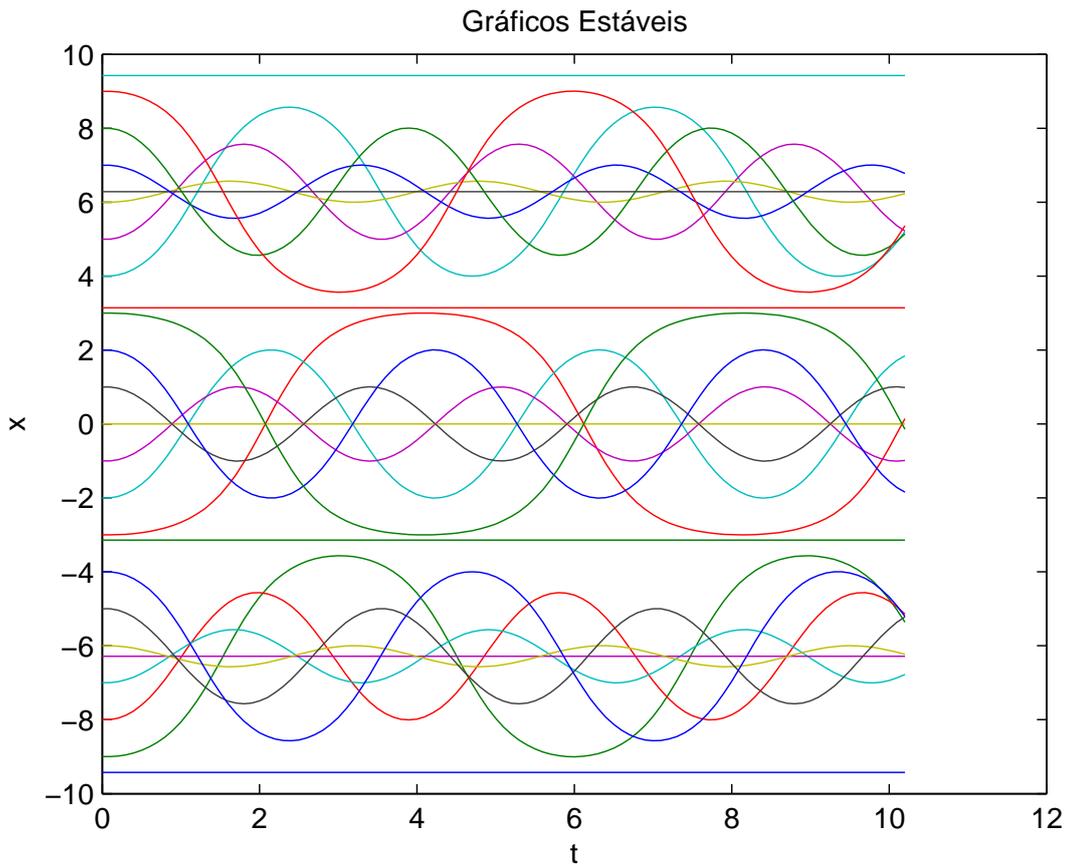


Figura 21: Gráfico de convergência no plano $\theta\dot{\theta}$.

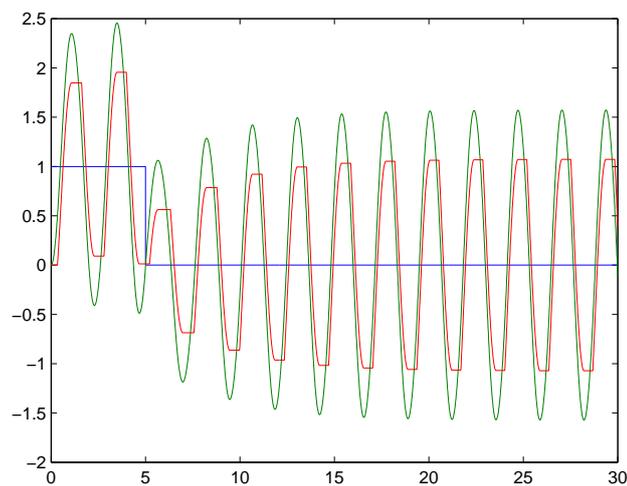


Figura 22: Análise do Sistema Zona Morta.

3.4 Oscilador de Van der Pol

O efeito de ciclo limites em sistemas não lineares pode ser observado na equação do oscilador de Van de Pol dado por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^1 + 1)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (3.7)$$

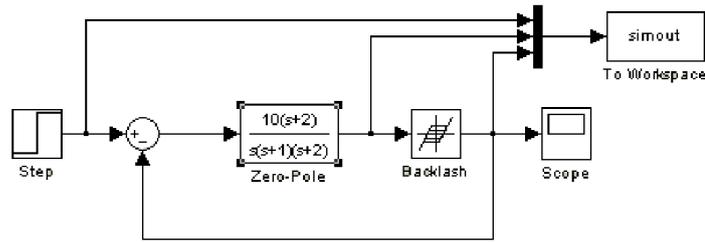
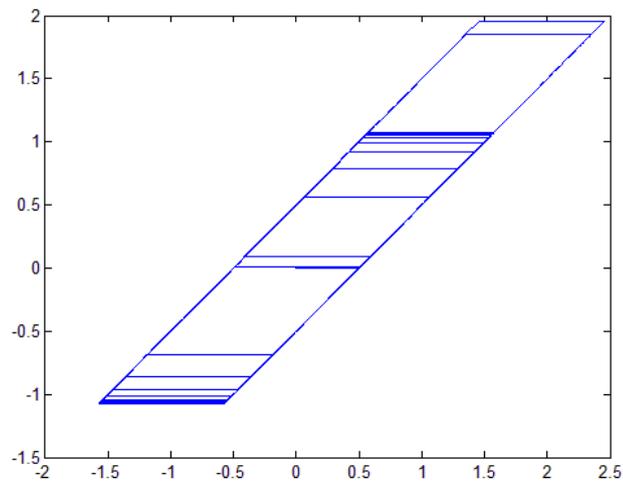
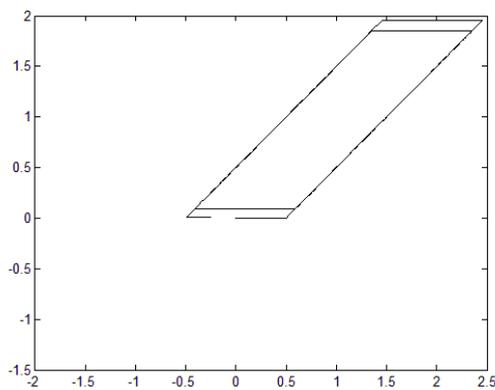


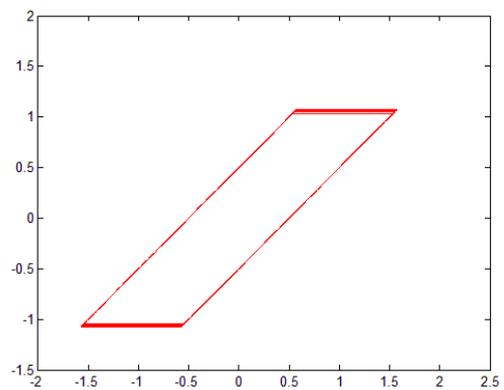
Figura 23: O sistema de controle simulado.



(a) Estabilização Zona Morta.



(b) Zona Morta Superior.



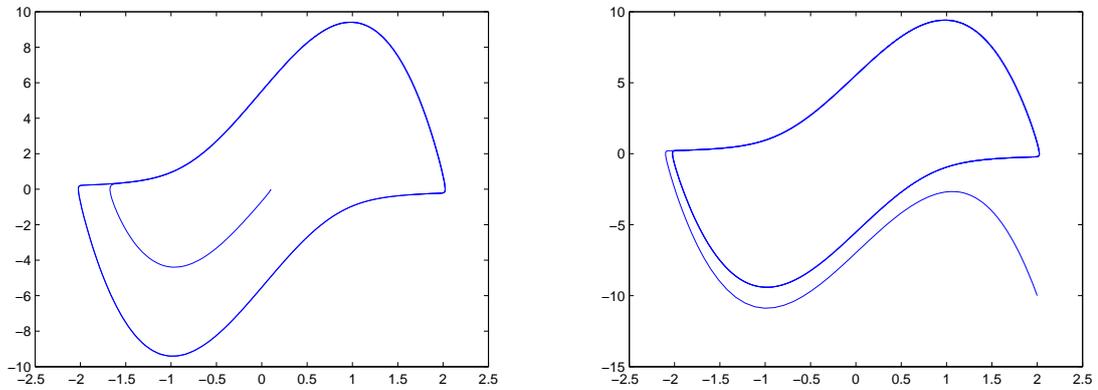
(c) Zona Morta Inferior.

Figura 24: Resposta do sistema no plano $x\dot{x}$.

onde μ é o coeficiente de amortecimento do oscilador.

Este oscilador apresenta um ponto de equilíbrio instável localizado na origem, além de um ciclo limite atrativo mostrado na Figura 25(b). Para simular os efeitos deste oscilador, foram consideradas duas situações de condições iniciais, sendo a primeira delas para um

ponto localizado internamente ao ciclo limite e outra externa a ele. Pode-se verificar que independente a condição inicial, desde que esta seja distinta de zero, o sistema irá tender ao ciclo limite e ali permanecer durante a evolução temporal.



(a) Condição inicial interna ao ciclo limite.

(b) Condição inicial externa ao ciclo limite.

Figura 25: Representação no plano $x\dot{x}$.

4 *Considerações Finais*

É muito comum encontrar a não linearidade nos sistemas utilizados no curso de engenharia elétrica da Universidade Federal de Viçosa. E normalmente, estes sistemas são linearizados para facilitar sua manipulação algébrica. Então, este trabalho tentou passar a importância da análise destes sistemas não lineares, suas aplicações e inconveniências, como a complexidade matemática que o envolve, através do estudo de casos mostrados no Capítulo 3.

A máquina de indução é um exemplo que possui não-linearidades em seus modelos e também sofre variações nos valores de seus parâmetros devido a fatores internos como a saturação magnética do rotor e a variação de temperatura.

Um outro exemplo onde pode-se encontrar a característica não linear de saturação na planta didática da Smar. Na planta dá-se a transformação que justifica todo o processo em que está inserida. É necessário fazer um controle para garantir os resultados, o que se traduz em estabilidade de transferir-se energia ilimitadamente para um sistema. Neste sentido, o atuador representa este impedimento quando satura em algum de seus limites. Exceder os limites do atuador implica em transmitir-se à planta um sinal distinto do fornecido pelo controlador. Desta forma, a lei de controle projetada para sistemas lineares não é aplicada. Surgem eventualmente overshoots, aumento do tempo de acomodação do sistema e - em alguns casos - o sistema torna-se instável.

A limitação física da transferência de energia para um sistema motiva a análise de aspectos importantes relacionados à saturação. O tamanho da região de atração da origem, determina onde, na ausência de perturbações, o sistema pode ser inicializado para que convirja à origem, assintoticamente. Na presença de perturbações é importante conhecer-se um limitante superior para a norma das perturbações toleráveis pelo sistema em malha fechada. Maximizar esta tolerância é um critério de desempenho potencialmente relevante. Outro critério possível é a atenuação que o sistema em malha fechada impõe à perturbação em uma de suas saídas.

Adicionalmente, pode-se comentar sobre os sistemas transistorizados, cuja saturação ocorre quando se tenta forçar uma corrente no coletor maior do que o circuito do coletor é capaz de fornecer enquanto mantém-se a operação no modo ativo.

E quando o transistor está em saturação, qualquer aumento da corrente de base resulta em um aumento muito pequeno na corrente de coletor. E isso é abordado superficialmente no ciclo básico da engenharia, entretanto para o controle mais apurado utilizando tais dispositivos, faz-se necessário uma análise para sistemas com comportamentos não lineares.

Como sugestão de trabalhos futuros, pode ser aplicados os conceitos de não linearidades aqui apresentados nos sistemas de controle estudados no decorrer do curso de engenharia elétrica, a fim de apresentar uma análise mais aprofundada em caráter científico.

Referências

- [1] SILVA, G. *Controlo não Linear*. [S.l.], 2003.
- [2] SLOTINE J.J. E.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. [S.l.]: New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- [3] CARELLI, R. *Analisis y Control de Sistemas no Lineales*. [S.l.], 2004.
- [4] GIBSON, J. *Nonlinear Automatic Control*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1963.
- [5] BUENO, A. *Projeto de Sistema de Controle com não Linearidade Causadora de Ciclo-Limite*. [S.l.], 2005.
- [6] BESSA, W. M. *Controle Robusto Nebuloso de Sistemas Não-Lineares com Zona-Morta*. [S.l.], 2005.
- [7] ALMEIDA, M. P.; COSTA, U. M. S. Exemplo de histerese com um sistema de massa-mola. In: *Revista Brasileira de Ensino de Física*. [S.l.: s.n.], 2000. v. 22.
- [8] BENDER, F. A. *Técnicas de Compensação dinâmica para sistemas lineares com saturação de controle*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006.