

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

AUGUSTO CÉSAR DE PAULA ARAÚJO

**INTERFACE EXPOSITIVA GRÁFICA DE CONTROLE SOBRE O  
SISTEMA DE UM PÊNULO INVERTIDO MOVIDO POR UM  
MOTOR CC**

VIÇOSA  
2022

AUGUSTO CÉSAR DE PAULA ARAÚJO

**INTERFACE EXPOSITIVA GRÁFICA DE CONTROLE SOBRE O  
SISTEMA DE UM PÊNULO INVERTIDO MOVIDO POR UM MOTOR  
CC**

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal de Viçosa, para a obtenção dos créditos da disciplina ELT 402 – Projeto de Engenharia II – e cumprimento do requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Rodolpho Vilela Alves Neves.

VIÇOSA  
2022

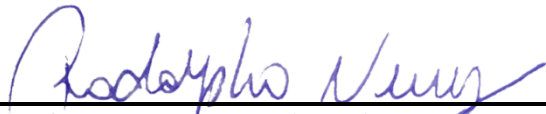
**AUGUSTO CÉSAR DE PAULA ARAÚJO**

**INTERFACE EXPOSITIVA GRÁFICA DE CONTROLE SOBRE O  
SISTEMA DE UM PÊNDULO INVERTIDO MOVIDO POR UM  
MOTOR CC**

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal de Viçosa, para a obtenção dos créditos da disciplina ELT 402 – Projeto de Engenharia II e cumprimento do requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica.


Aprovada em 16 de dezembro de 2022.

**COMISSÃO EXAMINADORA**



---

**Prof. Dr. Rodolpho Vilela Alves Neves – Orientador**  
**Universidade Federal de Viçosa**

Documento assinado digitalmente  
 MAURO DE OLIVEIRA PRATES  
Data: 20/12/2022 14:03:59-0300  
Verifique em <https://verificador.iti.br>

---

**Prof. Dr. Mauro de Oliveira Prates – Membro**  
**Universidade Federal de Viçosa**



---

**Me. Lucas Jonys Ribeiro Silva – Membro**  
**Universidade de São Paulo**

*“A capacidade de compreender ou pensar de forma diferente é mais importante do  
que o conhecimento adquirido”  
(David Bohm)*

*Dedico este trabalho aos meus pais, amigos e professores que ajudaram a criar todas as condições favoráveis para sua realização e para que eu chegasse nessa etapa de minha formação.*

## *Resumo*

O seguinte trabalho se propõe a desenvolver uma interface expositiva de controle sobre o resultado do estudo do sistema de um pêndulo invertido movido por uma plataforma deslocada pela tração de um motor CC. O pêndulo invertido é um sistema físico em que o centro de massa da haste se encontra acima do ponto pivô e este é utilizado em variadas aplicações que utilizam essa dinâmica. A execução de uma interface expositiva e seu uso por estudantes de engenharia pode ser uma forma proveitosa de demonstrar a estudantes de engenharia a utilização de conceitos de teoria de controle em sistemas físicos de várias áreas e complexidades, como em robótica, sistemas de energia solar, máquinas etc. Para realizar as simulações e verificar a validade dos cálculos de modelagem foi utilizado o *Simulink*, incluindo o diagrama de blocos e o *Multibody* para simular o sistema físico, com o pêndulo, as ligações e engrenagens. A interface de interação do usuário foi realizada através do *GUIDE*, plataforma do *Matlab*, em que é possível atuar sobre os parâmetros disponibilizados e programar as saídas desejadas. No estudo de casos da aplicação do controlador PID em malha fechada foi possível verificar a instabilidade do sistema com controladores P e PD, e da estabilidade dos controladores PI e PID, de acordo com as especificações de projeto. Além disso, foram acrescentadas outras facetadas de respostas da simulação que poderiam ser adicionadas a projetos futuros de controle do sistema do pêndulo invertido, principalmente em sistemas físicos de laboratório, como a análise da posição do carrinho.

## *Abstract*

The following work proposes to describe the realization of an expository control interface of the inverted pendulum system moved by a platform displaced by the traction of a DC motor. The inverted pendulum is a physical system in which the center of mass of the rod is above the pivot point and it is used in many applications that use this dynamic. The execution of an expository interface and its use by students can be a useful way to demonstrate to engineering students the use of control theory concepts in physical systems of various areas and complexities, such as robotics, solar energy systems, machines, etc . To carry out the simulations and verify the validity of the modeling calculations, Simulink was used, including the block diagram and Multibody to simulate the physical system, with the pendulum, the connections and gears. The user interaction interface was performed through GUIDE, a Matlab platform, in which it is possible to act on the available parameters and program the desired outputs. In the case study of the application of the closed-loop PID controller, it was possible to verify the instability of the system with P and PD controllers, and the stability of the PI and PID controllers, according to the design specifications. In addition, other aspects of simulation responses were added that could be considered to future projects of control of the inverted pendulum system, mainly in physical laboratory systems, such as the analysis of the cart position.

## *Sumário*

1. Introdução.....	13
1.1. Objetivo Geral .....	15
2 Referencial Teórico .....	16
2.1. A transformada de Laplace.....	16
2.2. A função de transferência.....	17
2.3. Diagrama de blocos .....	17
2.4. O Método do Lugar das Raízes aplicada aos projetos de sistemas de controle.....	18
2.5. O Controlador PID .....	19
2.6. Especificações para a resposta transitória .....	20
2.7. Frequência natural, $\omega_n$ e fator de amortecimento, $\zeta$ em sistemas de segunda ordem geral .....	20
2.8. Polos dominantes em malhas fechadas.....	21
2.9. Equações e dinâmica de movimentos de rotação e translação .....	22
2.10. Equações e dinâmica do motor cc e de suas respectivas ligações ao sistema .....	23
3 Modelagem do sistema pêndulo invertido .....	24
4 Simulações feitas no Simulink e interface gráfica .....	28
5 Resultados e discussão .....	33
5.1. Especificações de controle.....	33
5.2. Análise do sistema em malha aberta.....	33
5.3. Análise do sistema em malha fechada com controlador P ou PD .....	34
5.4. Análise do sistema em malha fechada com controlador PI.....	35
5.5. Análise do sistema em malha fechada com controlador PID .....	38
5.6. Considerações finais.....	39



6	Conclusões.....	41
7	Referências Bibliográficas .....	42

## *Lista de Figuras*

Figura 1 - Pêndulo invertido (FRANKLIN, 2013).....	14
Figura 2 - Diagrama genérico de polos e zeros no plano-s. FONTE: (DORF e BISHOP, 2013). Adaptado.....	17
Figura 3 – Representação de um diagrama de blocos genérico de uma malha aberta. ....	18
Figura 4 - Sistema realimentado em malha fechada com retroação negativa. FONTE: (FRANKLIN, 2013). Adaptado. ....	18
Figura 5 - Representação gráfica de exemplos de sobressinal e tempo de acomodação.....	20
Figura 6 – Circuito elétrico de armadura do motor de corrente contínua.....	23
Figura 7 – Representação do pêndulo invertido com os parâmetros físicos e diagrama de corpo livre. ....	24
Figura 8 - Modelo montado no <i>simulink</i> do pêndulo invertido .....	28
Figura 9 - Modelo montado no <i>simulink</i> motor cc .....	29
Figura 10 – Representação do sistema simulado no multibody .....	29
Figura 11 – Primeira aba da interface, com apresentação das respostas em malha aberta.....	30
Figura 12 – Segunda aba da interface, com os métodos e respostas do controle PID em malha fechada .....	31
Figura 13 – Aba referente à visualização do comportamento do carrinho.....	32
Figura 14: (a) Resposta do Malha Aberta ao impulso (b) Lugar das raízes da planta do pêndulo invertido. ....	33
Figura 15 – Resposta da simulação física ao degrau em malha aberta .....	34
Figura 16 – Local das raízes do sistema com 2 controlador PD distintos, com os seguintes parâmetros: (a) $k_p = 1$ e $k_d = 1$ (b) $k_p = 1$ e $k_d = 10$ .....	35
Figura 17 – Local das raízes do sistema com controle integrador.....	35
Figura 18 – Lugar das raízes com integrador e zero em -1. (a) Gráfico representando todos os polos e assíntotas (b) Comportamento próximo a origem e ponto escolhido. ....	36

Figura 19 – Resposta ao degrau do sistema com controlador PI, com $k_p = 144$ e $k_i = 144$ . (a)Gráfico gerado pelo <i>Matlab</i> (b)Gráfico gerado pela simulação do <i>Simulink</i> .....	37
Figura 20 - Lugar das raízes com integrador e zero em -10, com indicação do ganho escolhido. .....	37
Figura 21 – Resposta ao degrau do sistema com controlador PI, com $k_p = 18$ e $k_i = 180$ . (a) Gráfico gerado pelo <i>Matlab</i> (b) Gráfico gerado pela simulação do <i>Simulink</i> .....	38
Figura 22 - Lugar das raízes com controlador PID com os parâmetros $k_p = 37,5$ , $k_i = 225$ e $k_d$ $= 1,5$ .....	38
Figura 23 – Resposta ao degrau do sistema com controlador PID, com $k_p = 37,5$ , $k_i = 225$ e $k_d$ $= 1,5$ . (a) Gráfico gerado pelo <i>Matlab</i> (b) Gráfico gerado pela simulação do <i>Simulink</i> ...	39
Figura 24 – Resposta da simulação física ao degrau em malha fechada com controlador PID, com $k_p = 37,5$ , $k_i = 225$ e .....	40
Figura 25 – Comportamento da curva de tensão $e_a$ do terminal do circuito de armadura do motor cc, com controlador PID, com $k_p = 37,5$ , $k_i = 225$ e $k_d = 1,5$ . .....	40

## *Lista de Tabelas*

Tabela 1 – Propriedades da Transformada de Laplace.....	16
Tabela 2 – Identificação dos parâmetros físicos a serem utilizados.....	24
Tabela 3 - Parâmetros de simulação do sistema do pêndulo invertido.....	27

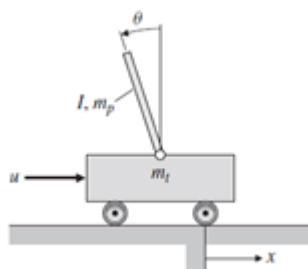
## 1. Introdução

A ideia da teoria de controle está relacionada à estabilidade de um sistema, que deve responder a comandos da entrada e ao mesmo tempo rejeitar distúrbios (FRANKLIN, 2013). Como por exemplo no veículo motorizado *Segway* (parecido com um patinete motorizado), que quando sem bateria tende à total instabilidade e pode cair e quando ligado tem a função de rejeitar as instabilidades devidas ao movimento do condutor, à velocidade e até de fatores mais externos como vento e obstáculos no caminho. Dessa forma, para obter um controle satisfatório deve-se obedecer a alguns requisitos como a constante busca da estabilidade, o rastreamento do sinal de entrada pela saída e a negação de distúrbios.

Um sistema é uma combinação de parâmetros, condições e elementos que funcionam para cumprir determinada tarefa ou propósito. Ou seja, de maneira geral, existem sistemas dos mais variados tipos e áreas do conhecimento, da biologia à economia (OGATA, 2010). Nesse projeto há um caso de sistema físico relacionado a um problema presente em algumas situações específicas de tecnologias do cotidiano e, por isso, a iniciativa de estudo do pêndulo invertido existe.

O objeto alvo desse trabalho envolve o sistema de um pêndulo invertido com uma haste, em que seu centro de massa deve se situar acima do ponto pivô, que é onde fica localizado seu eixo de rotação. Ou seja, a haste deve se equilibrar verticalmente para cima, assim como na Figura 1. Na Figura 1 é possível notar que o carrinho é deslocado através de uma força externa  $u$  e se desloca ao longo do eixo  $x$  e tem massa  $m_t$ . Enquanto a haste possui massa  $m_p$  e momento de inércia  $I$  e seu ângulo em relação ao eixo de referência é  $\theta$ .

Para realizar a estratégia de controle, o pêndulo deve ficar em cima de um carrinho que se locomoveria através de uma força externa gerada por um mecanismo que transmite o torque gerado por um motor CC a uma correia, através de polias, que impulsiona o carrinho, nesse caso, para manter a haste equilibrada verticalmente, já que naturalmente o sistema é desequilibrado, devido à gravidade.



**Figura 1 - Pêndulo invertido. FONTE: (FRANKLIN, 2013).**

Muitos sistemas de equilíbrio vertical possuem dinâmica parecida com pêndulo invertido e, por isso, atualmente existem vários exemplos de modelos físicos que necessitam desse tipo de controle como o veículo *Segway* (já mencionado anteriormente), próteses de joelho, robôs humanoides e outros exemplos como o projeto de desenho de prédios resistentes à terremotos (KRAFES, CHALH e SAKA, 2016).

Vários estudos já foram feitos para realizar o controle do pêndulo invertido em métodos lineares e não-lineares, incluindo como métodos lineares o PID (WANG, 2001) e o LQR (*linear quadratic*) (WASZAK e LANGOWSKI, 2020) e métodos não-lineares e de controle inteligente, como o *fuzzy* (ABDELAAL e MOHAMED, 2013), o *backstepping* (YAKOUB, CHARFEDDINE e BRAIEK, 2013) e vários outros.

Por isso, para esse projeto foi proposta uma interface expositiva através do GUIDE do *Matlab* dos resultados da modelagem e controle do sistema já apresentado, combinando as técnicas de controle PID de forma que o usuário possa interagir com o método de controle, escolhendo as constantes, analisando as respostas no lugar das raízes da planta e do sistema com controlador, as respostas a degraus de entrada no sistema e o desempenho do sistema equivalente simulado no *Simulink*.

Dessa forma, o estudo de modelos físicos como o pêndulo invertido em simulações é útil como material de estudo e aprendizado de sistemas complexos em controle e aplicações que podem ser vistas cotidianamente. É difícil avaliar a eficiência de novos métodos didáticos no aprendizado do aluno, e especificamente o benefício do uso de interfaces expositivas sobre o assunto, de maneira mais geral. Porém, é bem estabelecido que cada método de aprendizado possui objetivos diferentes, seja para fins conceituais, sociais, profissionais ou outros. E tais práticas são especialmente vantajosas para propósitos de criatividade e resolução de problemas e para entendimento melhor da matéria (MA e NICKERSON, 2006).

A combinação da teoria com a prática, como para uso de interfaces gráficas, exercita e aperfeiçoa várias habilidades como a análise de dados, o aprendizado das falhas, a criatividade e o uso responsável das ferramentas (KRIVICKAS e KRIVICKAS, 2007).

Krivickas (2007) também faz diversas pesquisas com alunos de turmas de laboratório de controle e laboratório de sinais e compara resultados como dados de aprendizado e motivação em que os alunos se avaliam e notas de desempenho recorrentes de testes posteriores a aulas de laboratório, simulação e teóricas. E em diversos cenários é possível notar o impacto positivo das práticas como o uso de simulações no desempenho nas provas e até na motivação dos alunos em aprender engenharia.

Além das várias aplicações do pêndulo invertido já citadas, como o transporte humano Segway (FRANKLIN, 2013), e um foguete na fase de lançamento (OGATA, 2010). É óbvio ressaltar que estratégias de controle extremamente precisas são necessárias, já que a estabilidade dos sistemas físicos está diretamente relacionada à segurança do trabalho de várias pessoas e de projetos multi-milionários, como os investimentos das empresas de âmbito aeroespacial. Por isso, estratégias de controle não lineares são mais recomendáveis nessas aplicações que requerem mais precisão, porém pelo foco do trabalho de abordar uma interface para fins didáticos, o controlador PID é suficiente.

### **1.1. Objetivo Geral**

O objetivo geral do trabalho é a produção de uma interface de interação sobre parâmetros de controle e análise das respostas de um modelo de sistema de um pêndulo invertido controlado pela tração gerada pelo torque de um motor cc ao carrinho que contém o pêndulo para facilitar a compreensão e desenvolvimento de estratégias de controle, além de observar a comparação destas respostas com o funcionamento de uma simulação física do modelo, criada na ferramenta Simulink do *software Matlab*.

## 2. Referencial Teórico

O referencial teórico para embasamento do trabalho envolve principalmente as bibliografias para realizar a modelagem do problema de acordo com as equações físicas e de teoria de controle para adequação e escolha de métodos eficientes para a realização do controle do sistema.

### 2.1. A transformada de Laplace

Primeiramente, é necessário definir a transformada de Laplace. Que é uma transformação integral de uma função no domínio do tempo  $f(t)$  para o domínio da frequência complexa  $F(s)$ , e envolve a seguinte equação:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

em que  $s$  é uma variável complexa dada por  $s = \sigma + j\omega$  (SADIKU e ALEXANDER, 2013).

Tal ferramenta matemática é importante, pois permite que os problemas envolvendo os sistemas de controle sejam tratados como equações algébricas, ao invés de equações diferenciais. Por isso, são apresentadas algumas propriedades importantes, na Tabela 1, que serão utilizadas posteriormente para encontrar a função de transferência e realizar as análises desejadas.

**Tabela 1 – Propriedades da Transformada de Laplace**

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$
4	$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

FONTE: (OGATA, 2010)



## 2.2. A função de transferência

Também é importante estabelecer que o objetivo da modelagem seria encontrar a função de transferência adequada ao sistema. A Função de Transferência é definida como a razão entre a resposta de saída e o estímulo de entrada, considerando as condições iniciais nulas. Além disso, uma função de transferência só é definida em sistemas lineares e estacionários, com parâmetros constantes. Ou seja, em determinado sistema a função de transferência é definida como:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]}\Big|_{\text{condições iniciais nulas}} \quad (2)$$

$$= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$

Sendo que, considerando em (2), a expressão algébrica do denominador é chamada de equação característica do sistema e determina o sistema de ordem n. Ademais, as raízes do polinômio do denominador são chamadas de zeros, enquanto as raízes do polinômio do numerador são chamadas de polos do sistema e podem ser representados no plano-s assim como na Figura 2 (OGATA, 2010).

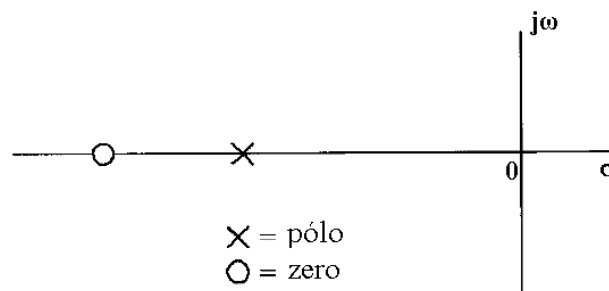


Figura 2 - Diagrama genérico de polos e zeros no plano-s. FONTE: (DORF e BISHOP, 2013). Adaptado.

Assim, após encontrar a função de transferência é possível aplicar as técnicas dos sistemas de controle, como o método de resposta em frequência ou o método do lugar das raízes, que será utilizado nesse trabalho.

## 2.3. Diagrama de blocos

A função de transferência expressa relações diretas entre as variáveis de controle e as variáveis controladas. Como essas relações traduzem propriedades de linearidade dos sistemas é possível representar essas relações através de diagramas, chamados de diagrama de blocos, como pode ser observado no diagrama de blocos de malha aberta mostrado na Figura 3. Os diagramas de blocos constituem blocos operacionais e unidirecionais que permitem a

visualização da configuração do sistema e até mesmo a realização de operações para extrair relações entre variáveis de entrada e saída (DORF e BISHOP, 2013).

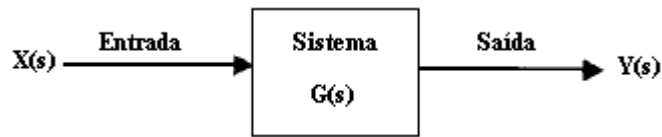


Figura 3 – Representação de um diagrama de blocos genérico de uma malha aberta.

FONTE: (DORF e BISHOP, 2013). Adaptado.

A Figura 4 demonstra a expressão do diagrama de blocos da função de transferência destacada em (3) e tais relações podem ser encontradas através de manipulações algébricas dos diagramas, expressas pelas interconexões de blocos, como as setas, nós e somadores. Sendo que o bloco da figura denominado sistema é comumente chamado de “planta”. Para um sistema em malha fechada, assim como mostrado na Figura 4, a função de transferência é expressa da seguinte forma:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (3)$$

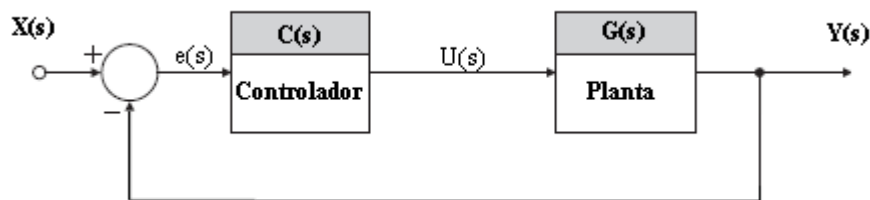


Figura 4 - Sistema realimentado em malha fechada com retroação negativa. FONTE: (FRANKLIN, 2013). Adaptado.

## 2.4. O Método do Lugar das Raízes aplicada aos projetos de sistemas de controle

O lugar das raízes é uma representação gráfica dos polos e zeros de um sistema à medida que seus parâmetros são variados. É um método muito utilizado em análise e projetos para a estabilidade e a resposta transitória de sistemas. Assim, é uma técnica gráfica que ajuda a solucionar controles principalmente de sistema de ordens superiores a 2. Assim, para um ganho  $K$  definido ao sistema, o gráfico do lugar das raízes apresenta as respostas obtidas a partir da variação de  $K$  (NISE, 2013).

Neste trabalho, como são utilizados métodos computacionais para construção dos gráficos, a análise se limita a interpretação e análise do lugar das raízes, de acordo com princípios e fundamentações decorrentes da construção matemáticas de tal ferramenta.

De maneira geral, o cruzamento do eixo imaginário  $j\omega$  do plano- $s$  separa a região estável e instável do sistema. A adição de polos desloca o lugar das raízes para direita, diminuindo a estabilidade relativa do sistema e aumentando seu tempo de acomodação. Já a adição de zeros desloca o local das raízes para a esquerda, o que causa diminuição do tempo de acomodação do sistema (OGATA, 2010).

## 2.5. O Controlador PID

Uma boa parte de sistemas de controle industriais utiliza o controlador PID, por sua praticidade e eficiência na aplicação, já que tal controlador se baseia em alguns princípios que, muitas vezes, são suficientes para satisfazer requerimentos de funcionamento de sistemas (OLIVEIRA, AGUIAR e VARGAS, 2016). Como as especificações desse trabalho, que serão vistas posteriormente, envolvem o domínio do tempo, o controlador PID tem um ótimo papel em fazer o usuário da interface analisar a tarefa de cada constante (proporcional, integradora e derivativa) na resposta do sistema, assim como na modificação do lugar das raízes com alteração de seus ganhos, polos e zeros.

O controlador PID é definido como:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (4)$$

em que  $k_p$  é constante proporcional,  $k_i$  a constante integradora e  $k_d$  a constante derivativa. A fim de analisar seu impacto no lugar das raízes, a equação pode ser reescrita como:

$$C(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \quad (5)$$

ou como:

$$C(s) = \frac{k_d \left( s^2 + \frac{k_p}{k_d} s + \frac{k_i}{k_d} \right)}{s} = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)}{s} \quad (6)$$

Dessa forma, é possível notar que o controlador PID acrescenta um polo na origem e dois zeros ( $z_1$  e  $z_2$ ) ao sistema.

De maneira geral, a constante proporcional está relacionada à rapidez de resposta do sistema, ou seja, quanto maior o  $k_p$  maior o esforço por parte do sistema para responder rápido

à entrada. Já a constante derivativa está relacionada a uma antecipação ao erro, ou seja, tem como efeito suavizar sinais instantâneos na entrada. Já a constante integradora está associada a incrementar a saída os valores de erro de maneira proporcional à sua magnitude, ou seja, está ligada à velocidade de eliminação do erro. (OLIVEIRA, AGUIAR e VARGAS, 2016).

## 2.6. Especificações para a resposta transitória

Em sistemas físicos, geralmente são exigidas especificações de controle, o que significa propor exigências quantitativas de qualidade da resposta do sistema. Para um pêndulo invertido, duas especificações principais são mais úteis para o sistema, de forma a evitar demasiados desvios e tempo de estabilização da haste em torno do ângulo de referência desejado de  $0^\circ$ : o máximo sobressinal e o tempo de acomodação.

Assim, o máximo sobressinal,  $M_p$  é definido como o valor máximo alcançado na curva de resposta do sinal, e o tempo de acomodação,  $t_s$ , é o tempo exigido para que a curva de resposta alcance os valores desejados em uma faixa (regularmente em um intervalo percentual de 2 a 5%) em torno do valor final pretendido, e que se mantenha infinitamente nesta faixa, como demonstrado na Figura 5 (OGATA, 2010).

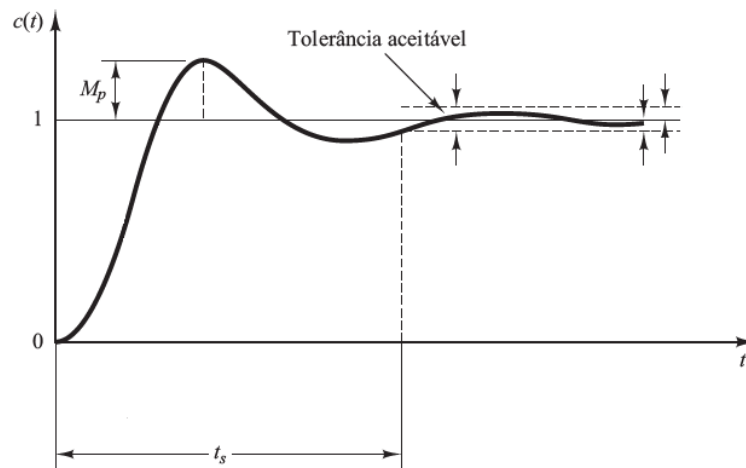


Figura 5 - Representação gráfica de exemplos de sobressinal e tempo de acomodação.

FONTE: (OGATA, 2010). Modificado.

## 2.7. Frequência natural, $\omega_n$ e fator de amortecimento, $\zeta$ em sistemas de segunda ordem geral

A fim de avaliar as características da resposta transitória do sistema de segunda ordem, podem ser utilizadas as grandezas físicas chamadas de frequência natural e fator de

amortecimento. A frequência natural é definida como a frequência de oscilação do sistema sem amortecimento. Já o fator de amortecimento é definido como a razão entre a frequência de decaimento exponencial da curva e a frequência natural (NISE, 2013).

A fim de abreviar as demonstrações e conceitos em relação à manipulação das variáveis, e das considerações a respeito dos tipos de amortecimento do sistema, a função de transferência de segunda ordem se apresenta da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7)$$

## 2.8. Polos dominantes em malhas fechadas

Em certas condições, um sistema de ordem superior, com mais de dois pólos ou com zeros pode ser aproximado por um sistema de segunda ordem que possui apenas dois polos dominantes em malha fechada. Desta forma, os polos de malha fechada mais próximos do eixo imaginário  $j\omega$  serão dominantes no comportamento da resposta transitória, porque responderão mais lentamente a sinais. Assim, de maneira quantitativa, considera-se que se a relação das partes reais dos polos mais próximos do eixo imaginário forem aproximadamente maiores que 5 então os polos serão dominantes no sistema em malha fechada. Por isso, pode-se ajustar o ganho de um sistema superior para ter polos complexos dominantes a fim de simplificar a análise do sistema e em um sistema estável, reduzir o efeito de algumas não linearidades (OGATA, 2010).

Tais considerações são importantes, pois existem relações matemáticas diretas entre as especificações de controle e a frequência natural,  $\omega_n$  e o fator de amortecimento,  $\zeta$ , porém, estas relações são demonstradas em sistemas de segunda ordem. Contudo, em sistemas de malha fechada com par de polos dominantes complexos as expressões para as especificações de controle podem ser utilizadas.

Na limitação do trabalho da resposta do sistema se limitar a um ângulo desejado de  $0^\circ$ , não se pode utilizar a expressão do percentual de sobressinal, já que não há que se falar em percentual quando a resposta de referência é nula. Porém, para o tempo de acomodação, considerando uma resposta subamortecida pode ser considerada em (8), a fim de propor e estudar posteriormente os parâmetros de controle pelo método das raízes, e considerando  $\sigma_d$  a parte real dos polos dominantes.

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{\sigma_d} \quad (8)$$

## 2.9. Equações e dinâmica de movimentos de rotação e translação

Para realizar a modelagem de sistemas dinâmicos de rotação e translação como o pêndulo invertido é necessário conhecimento prévio sobre as equações matemáticas dos modelos físicos e aplicação destas nos problemas tratados.

Primeiramente, a equação mais importante, decorrente da segunda lei de Newton, que trata das relações de força aplicados a um corpo, que é dada por:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (9)$$

ou seja, a soma vetorial de todas as forças (F, em N) aplicadas a um corpo é equivalente a multiplicação da massa do corpo (m, em kg) pela sua aceleração vetorial (a, em m/s<sup>2</sup>).

A força de atrito age em oposição ao movimento do corpo e é dada por:

$$\vec{F}_a = b \cdot \vec{v} \quad (10)$$

sendo F<sub>a</sub>, em N, o vetor da força de atrito aplicado em um corpo, b, em N/(m/s), o coeficiente de atrito e v, em m/s, o vetor de velocidade do corpo.

Para movimentos rotacionais, são utilizadas equações parecidas, sendo elas:

$$M = I\alpha \quad (11)$$

sendo M, em N.m, a soma de todos os momentos (também chamado de torque) externos sobre o centro de massa do corpo, I, em kg.m<sup>2</sup>, o momento de inércia do corpo e α, em rad/s, a aceleração angular do corpo.

Assim como o momento também pode ser dado por:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (12)$$

considerando  $\vec{M}$  o vetor resultante do momento aplicado em um corpo sendo o produto vetorial entre r, em m, o vetor da distância em relação ao eixo de rotação e F, em N, o vetor força aplicado no sentido de sua aplicação (OGATA, 2010).

Existem inúmeras outras equações para a dinâmica translacional e rotacional de corpos, todavia somente as apresentadas serão utilizadas para modelagem do sistema. Além disso, para uso das técnicas da transformada de Laplace e simplificação do problema, os vetores velocidade são transformados em função de sua expressão diferencial em função do tempo.

## 2.10. Equações e dinâmica do motor cc e de suas respectivas ligações ao sistema

Para incluir a contribuição do motor cc à excitação do carrinho que move o pêndulo invertido deve-se conhecer as equações úteis para modelar o sistema. É útil estabelecer que para este trabalho foi considerado um fluxo contínuo no motor, o que é característica de motores de imã permanente. Desta forma, considerando a Figura 6, deve-se extrair a corrente de armadura, o torque mecânico do rotor e a relação da FEM  $v_b$  em termos da velocidade angular do rotor.

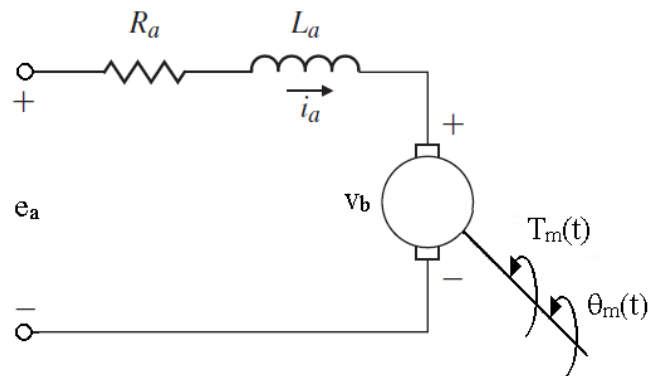


Figura 6 – Circuito elétrico de armadura do motor de corrente contínua

Aplicando a lei de Kirchhoff das malhas, e desconsiderando o efeito pequeno da indutância na armadura, a corrente de armadura é dada por:

$$i_a = \frac{e_a - v_b}{R_a} \quad (13)$$

sendo  $e_a$ , em V, a tensão do terminal do circuito de armadura,  $v_b$ , em V, a força eletromotriz e  $R_a$ , em  $\Omega$ , a resistência equivalente do circuito de armadura.

O torque mecânico,  $T_m$ , se relaciona com a corrente  $i_a$  através da equação:

$$T_m = K_t \cdot i_a \quad (14)$$

sendo  $K_t$ , em N.m/A, a chamada constante de torque do motor.

E, por último, a relação da FEM  $v_b$  com a velocidade angular do rotor, que se relacionam através da equação:

$$v_b = K_b \cdot \omega_m \quad (15)$$

sendo  $K_b$ , em V/(rad/s), a chamada constante contra eletromotriz (fcem), e  $\omega_m$  a velocidade angular.

### 3. Modelagem do sistema pêndulo invertido

Como o objetivo do problema envolve controlar o ângulo do pêndulo invertido de acordo com uma tensão de entrada ao motor  $e_a$ , deve-se gerar a função de transferência  $\frac{\theta'(s)}{E_a(s)}$ , ou seja, sendo  $\theta'(s)$  a função de saída representando o ângulo da haste e  $E_a(s)$  a função de saída que representa a tensão aplicada na entrada.

Assim, para iniciar o problema é necessário expressar o centro de massa do pêndulo em relação à referência, ou seja, em relação aos eixos bidimensionais do sistema e em relação ao ângulo  $\theta$  do pêndulo. Além disso, os parâmetros físicos exibidos na Figura 7 necessários para expressar as equações estão presentes na Tabela 2.

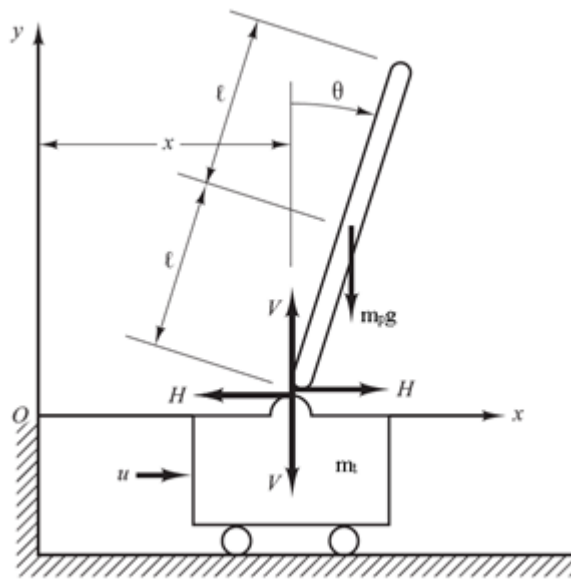


Figura 7 – Representação do pêndulo invertido com os parâmetros físicos e diagrama de corpo livre.

FONTE: (OGATA, 2010). Adaptado.

Tabela 2 – Identificação dos parâmetros físicos a serem utilizados

$m_t$	Massa do carrinho
$m_p$	Massa da haste
$b$	Coefficiente de atrito do carrinho com a superfície
$I$	Momento de inércia da haste
$g$	Aceleração da gravidade



---

$l$	Distância do eixo ao centro de massa da haste
$R_a$	Resistência equivalente do circuito de armadura
$K_b$	Constante contra eletromotriz
$K_t$	Constante de torque do motor
$r$	Raio da polia
$x$	Coordenada de referência do carrinho na horizontal
$u$	Força aplicada ao carrinho
$\theta$	Ângulo de referência da haste

---

Tomando como referência o carrinho, e assumindo no diagrama de corpo livre as forças horizontais:

$$u = m_t \ddot{x} + b \dot{x} + H \quad (16)$$

Fazendo o mesmo processo, porém com o diagrama com referência no ponto pivô da haste:

$$H = m_p \ddot{x} + m_p l \ddot{\theta} \cos \theta - m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (17)$$

Substituindo a variável H da equação (17) na equação (16), é possível obter a primeira equação do movimento:

$$(m_t + m_p) \ddot{x} + b \dot{x} + m_p l \ddot{\theta} \cos \theta - m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta = u \quad (18)$$

Agora tomando como referência o diagrama de corpo livre as forças verticais no pêndulo:

$$V \sin \theta + H \cos \theta - m_p g \sin \theta = m_p l \ddot{\theta} + m \ddot{x} \cos \theta \quad (19)$$

E, por último, o somatório dos momentos resultantes aplicados na haste do pêndulo em relação ao seu centro de massa:

$$I \ddot{\theta} = -V l \sin \theta - H l \cos \theta \quad (20)$$

Pode-se substituir a equação (20) na (19) para se obter finalmente a segunda equação do movimento:

$$(I + m_p l^2) \ddot{\theta} + m_p g l \sin \theta = -m_p l \ddot{x} \cos \theta \quad (21)$$

Considerando que as técnicas de análise de controle a serem utilizadas são lineares, as equações serão calculadas ao redor do ponto de equilíbrio com  $\theta = \pi$  e considerando pequenos distúrbios  $\theta'$ . Assim, as seguintes aproximações podem ser consideradas:

$$\cos \theta = \cos(\pi + \theta') \approx -1 \quad (22)$$

$$\text{sen } \theta = \text{sen}(\pi + \theta') \approx \theta' \quad (23)$$

$$\dot{\theta}^2 = \theta'^2 \approx 0 \quad (24)$$

Logo, pode-se simplificar as equações (18) e (21) para:

$$(m_t + m_p)\ddot{x} + b\dot{x} - m_p l \ddot{\theta}' = u \quad (25)$$

$$(I + m_p l^2)\ddot{\theta}' - m_p g l \theta' = m_p l \ddot{x} \quad (26)$$

Porém, a equação (25) se encontra em função da variável  $u$ , que representa uma força de entrada, e deve ser substituída por uma relação de  $E_a$ . Através da equação (15), é possível encontrar a seguinte relação de  $v_b$ :

$$v_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} = K_b \frac{1}{r} \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow v_b(t) = \frac{K_b}{r} \dot{x} \quad (27)$$

Substituindo  $v_b$  na equação (13), obtém-se a expressão de  $i_a$ :

$$i_a(t) = \frac{e_a(t) - \frac{K_b}{r} \cdot \dot{x}}{R_a} \quad (28)$$

Substituindo  $i_a$  na equação (14), e utilizando a forma escalar da equação (12), obtém-se a expressão de  $u$ :

$$u(t) = \frac{K_t}{r} \cdot \frac{e_a(t) - \frac{K_b}{r} \dot{x}}{R_a} \quad (29)$$

Finalmente, substituindo a equação (29) na equação (25), a segunda equação completa do movimento do pêndulo é dada por

$$(m_t + m_p)\ddot{x} + b\dot{x} - m_p l \ddot{\theta}' = \frac{K_t}{r} \cdot e_a(t) - \frac{K_t K_b}{r^2 R_a} \cdot \dot{x} \quad (30)$$

Ao aplicar a transformada de Laplace, com as propriedades da Tabela 1, nas equações (26) e (30) encontra-se:

$$\begin{aligned} (m_t + m_p)s^2X(s) + bsX(s) - m_pls^2\theta' \\ = \frac{K_t}{r} \cdot E_a(s) - \frac{K_tK_b}{r^2R_a} \cdot sX(s) \end{aligned} \quad (31)$$

$$(I + m_pl^2)s^2\theta'(s) - m_pgl\theta'(s) = m_pls^2X(s) \quad (32)$$

Como estabelecido anteriormente, a função de transferência desejada é a  $\frac{\theta'(s)}{E_a(s)}$ , e para isso deve-se isolar  $X(s)$  da equação (32) e substituir na equação (31). Dessa forma, é obtida a função de transferência:

$$\frac{\theta'(s)}{E_a(s)} = \frac{s \cdot A}{s^3 \cdot B + s^2 \cdot C + s \cdot D + E} \quad (33)$$

Os seguintes parâmetros foram utilizados para as simulações do pêndulo invertido:

Sendo que as constantes visíveis na função de transferência são dadas por:

$$A = rm_plK_t \quad (34)$$

$$B = R_ar^2[(m_t + m_p)(I + m_pl^2) - m_p^2l^2] \quad (35)$$

$$C = [K_tK_b(I + m_pl^2)] \quad (36)$$

$$D = -r^2m_plR_a(m_t + m_p)g \quad (37)$$

$$E = -m_plK_tK_bg \quad (38)$$

Os valores dos parâmetros são dados pela tabela seguinte:

**Tabela 3 - Parâmetros de simulação do sistema do pêndulo invertido**

$m_t = 0,5 \text{ kg}$	$m_p = 0,2 \text{ kg}$
$b = 0,1 \text{ N/(m/s)}$	$l = 0,3 \text{ m}$
$I = 0,006 \text{ kg.m}^2$	$g = 9,8 \text{ m/s}^2$
$R_a = 0,1 \Omega$	$K_b = 0.0453$
$K_t = 0.0453$	$r = 0,02 \text{ m}$

Substituindo os valores da Tabela 3 na função de transferência (33), é obtida a seguinte função de transferência:

$$\frac{\theta'(s)}{E_a(s)} = \frac{5,436 \cdot 10^{-5} \cdot s}{5,28 \cdot 10^{-7} \cdot s^3 + 4,925 \cdot 10^{-5} \cdot s^2 - 1,648 \cdot 10^{-5} \cdot s - 0,001208} \quad (39)$$

## 4. Simulações feitas no Simulink e interface gráfica

Para realizar as simulações do pêndulo invertido foi montado no *simulink* o modelo exibido na Figura 8, possuindo uma entrada de um resultante de tensão, assim como desejado e requerido pela modelagem, sendo o torque resultante transmitido do rotor do motor cc para a polia, que transmite força para a engrenagem da correia que movimenta o carrinho.

O primeiro passo foi a inserção do bloco *Mechanism Configuration* para configurar a aceleração da gravidade. Em seguida os blocos *World Frame* e *Solver Configuration*, representando o chão e a origem do sistema mecânico.

Logo depois, os blocos *Rigid Transform* e *Prismatic Joint* foram adicionados representando o eixo da roda do carrinho, rotacionado 90° no eixo Y.

O bloco *Solid* representando o carrinho foi conectado na saída F do *Prismatic Joint*. Os blocos *Revolute Joint* e *Rigid Transform* foram inseridos na sequência representando a junta de rotação entre o carrinho e o pêndulo, rotacionada 90° no eixo X. Ademais, o bloco *Solid* foi adicionado representando o pêndulo. A configuração resultante é exibida na Figura 8.

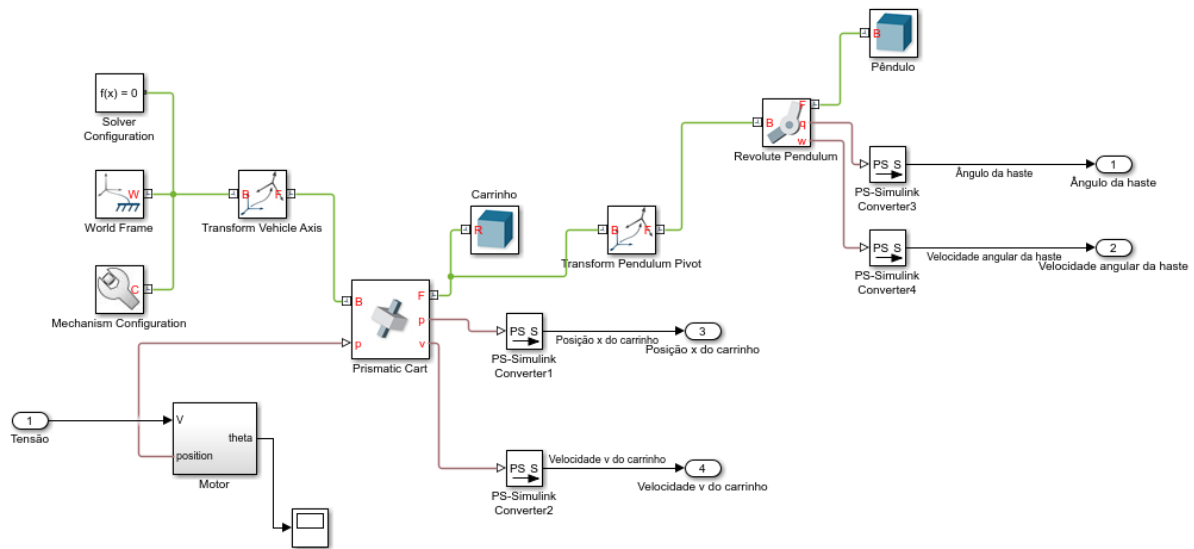
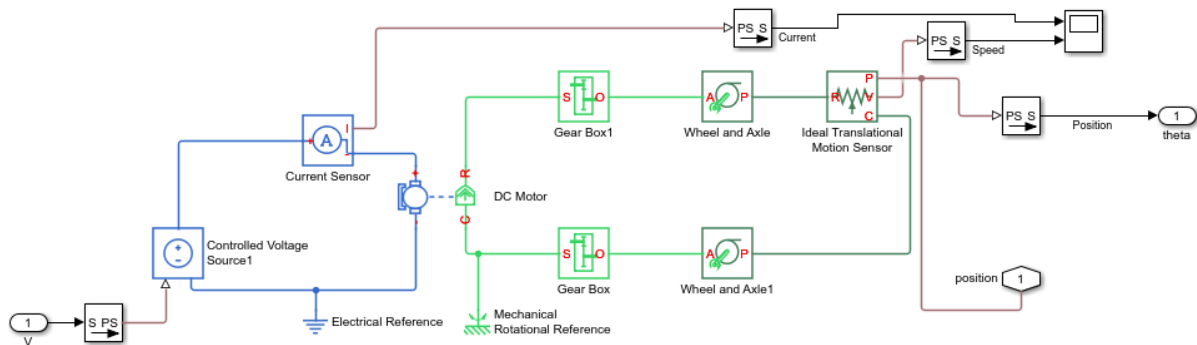


Figura 8 - Modelo montado no *simulink* do pêndulo invertido

Em seguida, foi adicionado o motor CC pelo bloco *DC Motor* e conectado à caixa de engrenagem, às rodas e ao sensor de translação, *Gear Box*, *Wheel and Axle* e *Ideal Translation Motion Sensor* foram os blocos utilizados respectivamente. O sensor de translação foi conectado ao *Prismatic Joint*, que representa o eixo da roda do carrinho. A alimentação do

motor foi concebida por uma fonte DC controlada, *Controlled Voltage Source*. Foram definidos também dois sinais de referência, para a elétrica e mecânica.

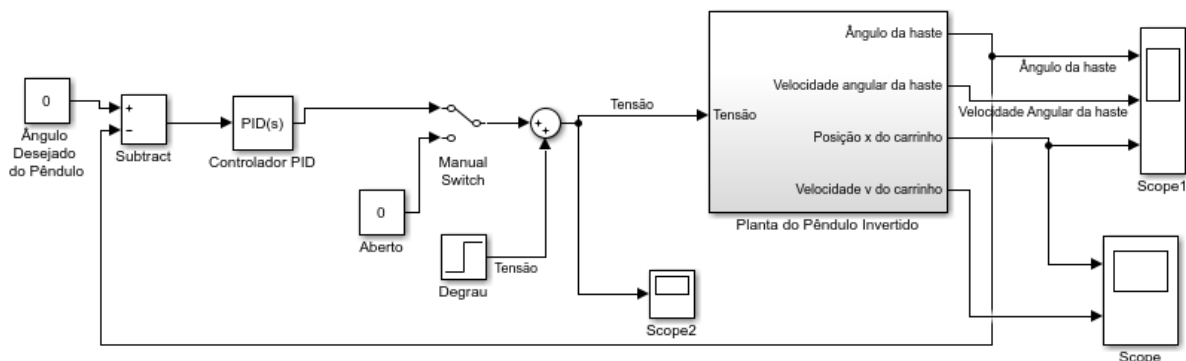
Por fim, foram adicionados os blocos *PS-Simulink Converter*, para converter a medida física em um sinal simulink sem unidade amostrados em *scopes*. O esquema resultante é exibido na Figura 9.



**Figura 9 - Modelo montado no simulink motor cc**

Em seguida, foram adicionadas as entradas que fecharão o sistema do pêndulo invertido, com o controlador PID a ser implementado e uma entrada degrau de 5 V para o motor. O sensor de translação foi conectado ao *Prismatic Joint*, que representa o eixo da roda do carrinho.

Por fim, a malha do sistema foi fechada e as saídas resultantes são demonstradas através dos *scopes*. O esquema resultante é exibido na Figura 10. Note que o sistema possui diversas saídas, como a velocidade angular da haste, a posição do carrinho de acordo com o eixo x e sua velocidade, porém tais grandezas não serão o foco deste trabalho.

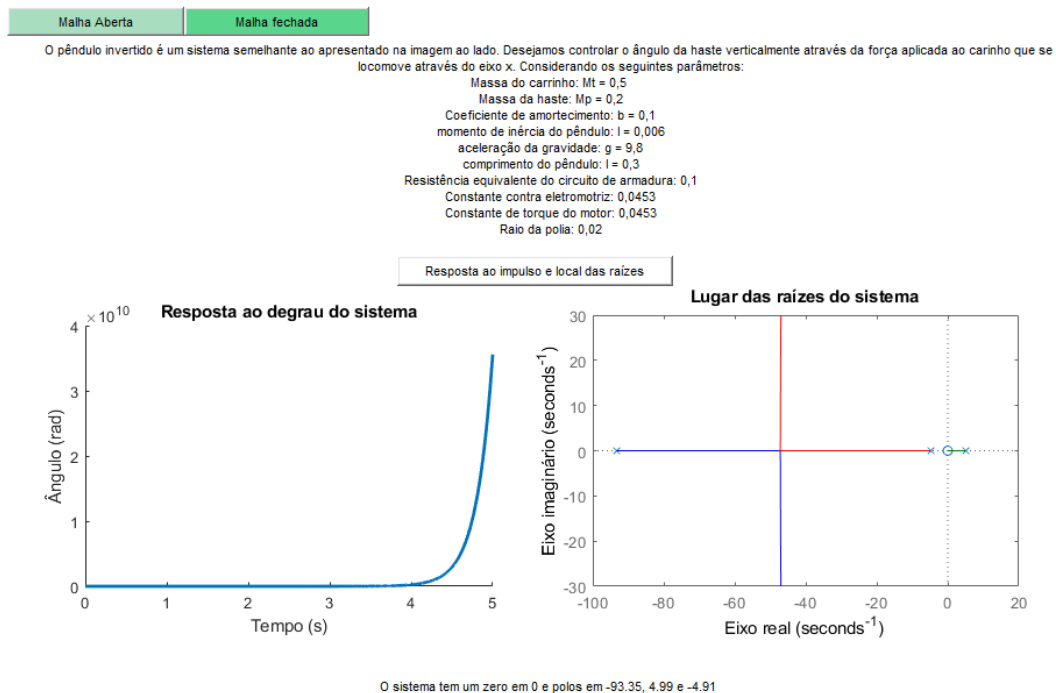


**Figura 10 – Representação do sistema simulado no multibody**

Para a criação da interface expositiva dos resultados obtidos foi utilizada a ferramenta GUI (*Graphical User Interfaces*) que cria janelas interativas para o usuário e permite a visualização de resultados através de respostas, gráficos e saídas. O papel da interface será apresentar um meio simples para o usuário de familiaridade com o sistema e meios para realizar

seu controle através das ferramentas interativas já demonstradas e do conhecimento dos métodos de controle.

Primeiramente, é feita uma apresentação breve do sistema, assim como mostrado na Figura 11, com parte da janela da interface, com seus conceitos e valores dos parâmetros. Assim, o usuário, após requisitar a resposta do sistema em malha aberta apertando o botão, aparecerá nessa aba primária a apresentação da resposta do sistema ao degrau, seu local das raízes com texto de explicação de onde se localizam cada zero e polo do sistema para análise de estabilidade em malha aberta.

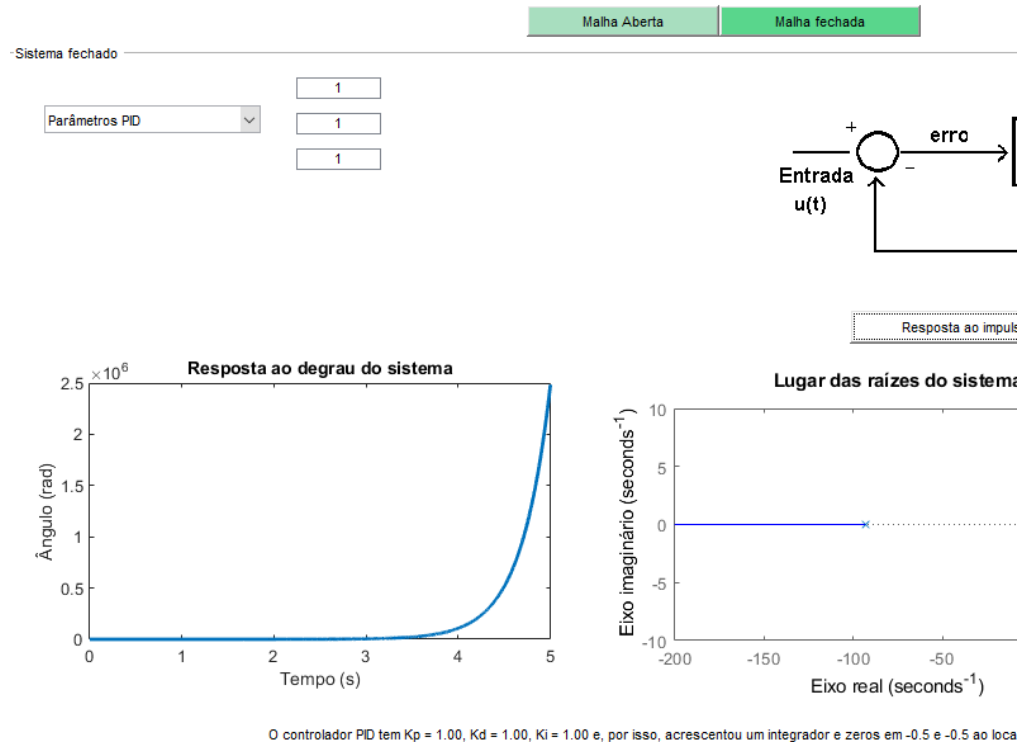


**Figura 11 – Primeira aba da interface, com apresentação das respostas em malha aberta**

Na segunda aba, o usuário tem acesso aos métodos de controle PID do sistema, assim como observado na Figura 12 (que mostra parte da janela, onde é possível observar o local de inserção dos parâmetros do controlador). A fim de facilitar o controle tanto pela resposta ao degrau no domínio do tempo quanto para o lugar das raízes, é possível escolher diretamente os parâmetros PID (ganhos proporcionais, integrativos e derivativos), assim como escolher diretamente os zeros, polos e ganhos, podendo, dessa forma, optar por não haver polos (caso do controlador PD), nenhum zero (controlador P) ou apenas um zero (controlador PI).

Também é possível selecionar pontos nos gráficos, o que permite fazer uma escolha mais apropriada do ganho, a fim de mover o lugar das raízes do sistema para a esquerda, tornando-o mais estável. Além disso, essa aba produz três respostas, os gráficos de resposta ao degrau, lugar das raízes em malha aberta e em malha fechada. E também são retornadas as

informações necessárias a eventuais ajustes de controlador como os parâmetros PID resultantes caso escolhidos os zeros, polos e ganhos e o local de cada zero, caso tenham sido escolhidos as variáveis proporcional, integrativa e derivativa. Cada um tem seu propósito para o usuário a fim de interagir com os parâmetros do controlador, observar as respostas, perceber padrões, aplicar conceitos, absorver o impacto de cada mudança nas respostas e constatar a resposta final.



**Figura 12 – Segunda aba da interface, com os métodos e respostas do controle PID em malha fechada**

Após a seleção de parâmetros e interação com usuário para verificação das respostas a interface abre à parte a visualização do funcionamento da simulação do pêndulo movido em um carrinho, para o controlador escolhido, como é possível observar na Figura 13. Dessa forma, é possível comparar a resposta no domínio do tempo com o comportamento da haste do pêndulo e observar se há similaridades ou não entre o modelo físico simulado e o sistema representado pela função de transferência. Por isso, além de mostradas respostas do sistema a possíveis entradas de parâmetros serão comparadas aos gráficos gerados pelo *scope* da simulação que demonstram a variação do ângulo da haste do pêndulo.

Uma apresentação breve da interface é apresentada no link: “<https://youtu.be/Z5JT8u8xsqA>”, em que são mostradas as caixas de seleção, a utilidade dos gráficos e como um usuário poderia utilizar a interface.

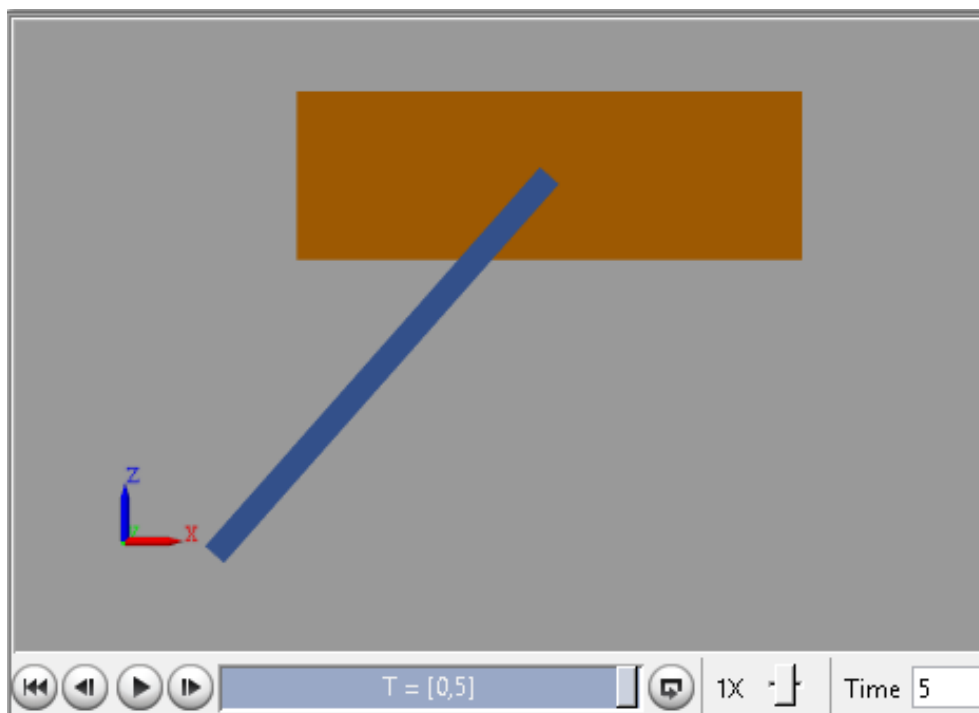


Figura 13 – Aba referente à visualização do comportamento do carrinho.



## 5. Resultados e discussão

### 5.1. Especificações de controle

Para as especificações de controle, primeiramente, foi considerada uma entrada degrau de 5 V transferida para o motor CC. Para a resposta no domínio do tempo, foi estabelecido um sobressinal máximo de 0,2 rad e um tempo de acomodação de 5 s.

### 5.2. Análise do sistema em malha aberta

Através da *toolbox* RLTOOL do MATLAB é possível, pelo gráfico do lugar das raízes projetar um controlador PID adequado para o pêndulo invertido. Tal ferramenta é um ponto de partida para início da análise do sistema, já que permite comparar diferentes respostas do sistema a diferentes controles e a várias excitações, de acordo com as necessidades de cada projeto ou sistema. Assim, em uma malha aberta o pêndulo invertido gera a resposta observada na Figura 14(a), o que vai de acordo com as expectativas de instabilidade.

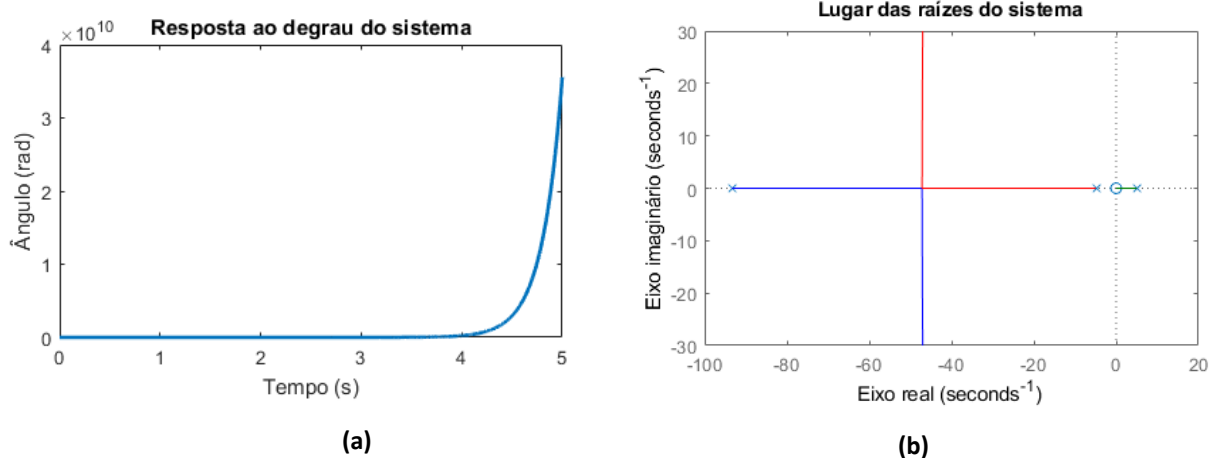


Figura 14: (a) Resposta da Malha Aberta ao impulso (b) Lugar das raízes da planta do pêndulo invertido.

Pelo lugar das raízes do sistema, na Figura 14(b), é possível chegar à mesma conclusão, já que o sistema possui uma assíntota no semi-plano direito (em verde) do eixo real. Isso significa que independente de um ganho  $K$  escolhido sempre haverá um polo de malha fechada no semi-plano direito. E a interface retorna ao usuário a seguinte mensagem: “O sistema tem um zero em 0 e polos em -93.35, 4.99 e -4.91”.

A simulação física produz a resposta exibida na Figura 15. É possível notar que, enquanto a resposta gerada pelo *Matlab* produz um ângulo de grandeza de até  $10^{10}$  a resposta

da simulação gerou um ângulo de grandeza 10. Este comportamento se repete na análise de outras respostas instáveis com controlador, a simulação gera instabilidade com grandezas consideravelmente menores.

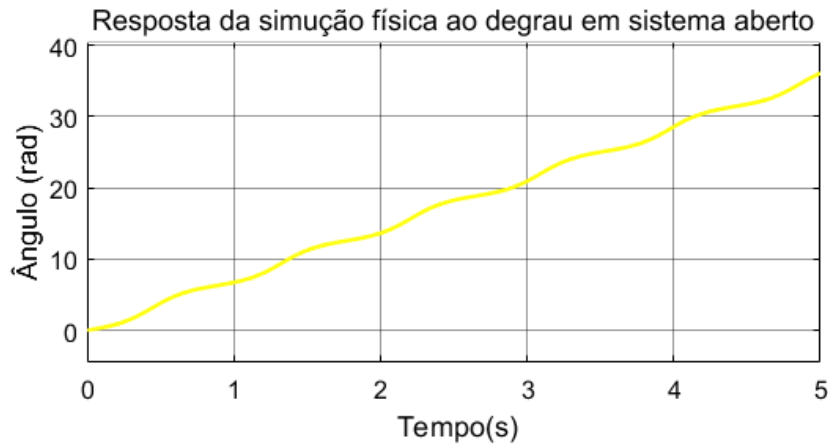


Figura 15 – Resposta da simulação física ao degrau em malha aberta

### 5.3. **Análise do sistema em malha fechada com controlador P ou PD**

Além disso, possui um zero na origem, por isso, para cancelá-lo o primeiro passo ao construir o controlador seria incluir também um polo na origem. Porém, como a premissa do trabalho envolve um controlador PID tal adição já é presumida, o que reduz o trabalho na inclusão adequadas dos zeros. Portanto, é possível deduzir que um controlador P ou PD, simplesmente, não garantem respostas adequadas para o nosso sistema.

Como exemplo para essa alternativa foram utilizados dois casos com controladores PD: o primeiro caso com  $k_p = 1$  e  $k_d = 1$ , e o segundo caso com  $k_p = 1$  e  $k_d = 10$ . Nas Figura 16(a) e Figura 16(b) é possível notar que o local das raízes é quase idêntico, com a exceção do local em que se insere o novo zero no sistema. Porém, controlador PD continua com um segmento totalmente no semi-plano direito do eixo real, o que comprova a afirmação anterior sobre a instabilidade do sistema frente aos controladores PD.

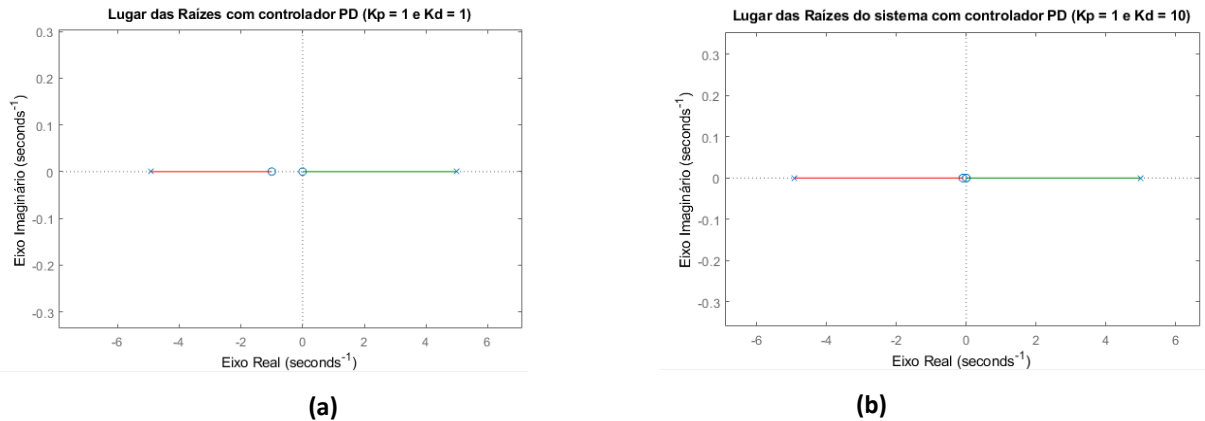


Figura 16 – Local das raízes do sistema com 2 controlador PD distintos, com os seguintes parâmetros: (a)  $k_p = 1$  e  $k_d = 1$  (b)  $k_p = 1$  e  $k_d = 10$ .

As respostas ao degrau no domínio do tempo foram omitidas, pois não se diferem muito das respostas já apresentada em malha aberta.

#### 5.4. Análise do sistema em malha fechada com controlador PI

Adicionando um controle puramente integrador ao sistema ( $C = 1/s$ ), é obtido um local das raízes como mostrado na Figura 17. Como foi adicionado um único polo ao sistema, em malha fechada, o sistema possui quatro polos e um zero. Assim possui três assíntotas, mas algumas que ainda se localizam totalmente na região instável do gráfico. Por isso, é necessário acrescentar zeros ao sistema, que como já definido anteriormente, move o local das raízes para o lado esquerdo.

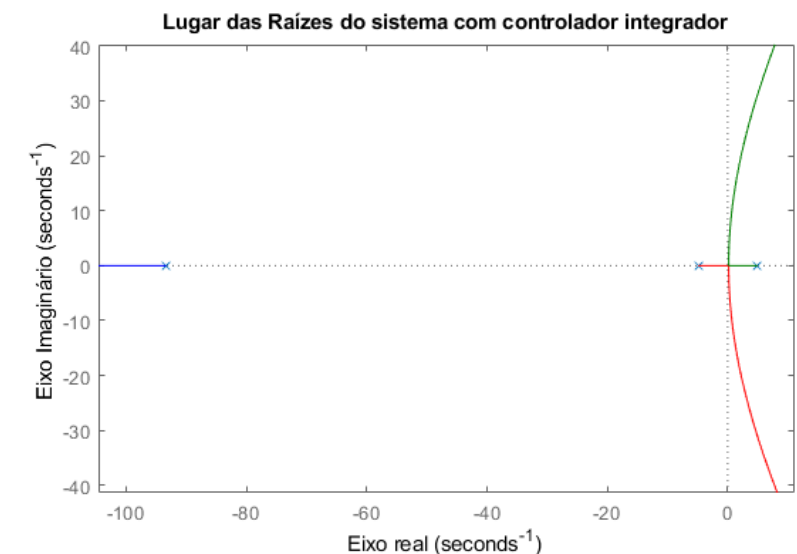


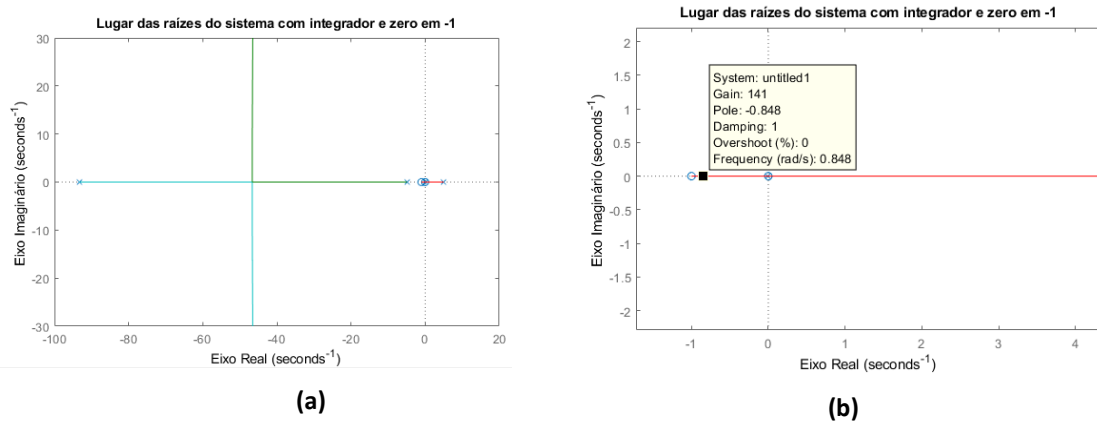
Figura 17 – Local das raízes do sistema com controle integrador

Se acrescentado um zero ao controlador, ele se torna um PI e faz com que o local das raízes tenha 2 assíntotas (ao invés de 3). E estas se cruzarão perpendicularmente ao eixo imaginário no ponto  $s$ , de acordo com a equação:

$$s = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{zeros}}{\text{qtd. polos} - \text{qtd. zeros}} \quad (40)$$

Assim, considerando que  $s < 0$ , tem-se que  $z > -93,27$ . Além disso, deve-se considerar a equação (8) para uma resposta que esteja nas especificações de controle, ou seja, para um tempo de acomodação de 5 segundos, os polos dominantes devem se localizar aproximadamente à esquerda de  $s = -0,8$ , por isso, deve-se escolher um controlador PI que satisfaça tais condições.

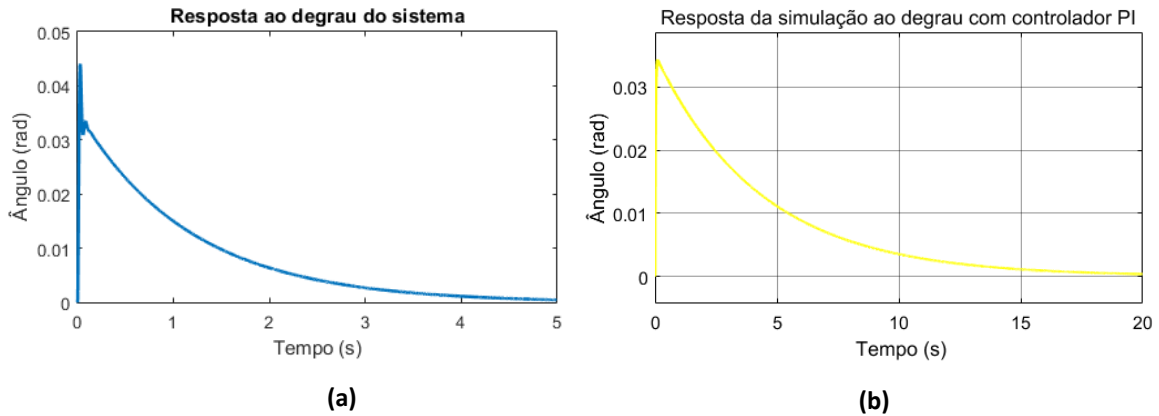
Considerando a equação (6), serão escolhidos dois casos a fim de comparação: o primeiro caso com zero em -1, e o segundo com zero em -5.



**Figura 18 – Lugar das raízes com integrador e zero em -1. (a) Gráfico representando todos os polos e assíntotas (b) Comportamento próximo a origem e ponto escolhido.**

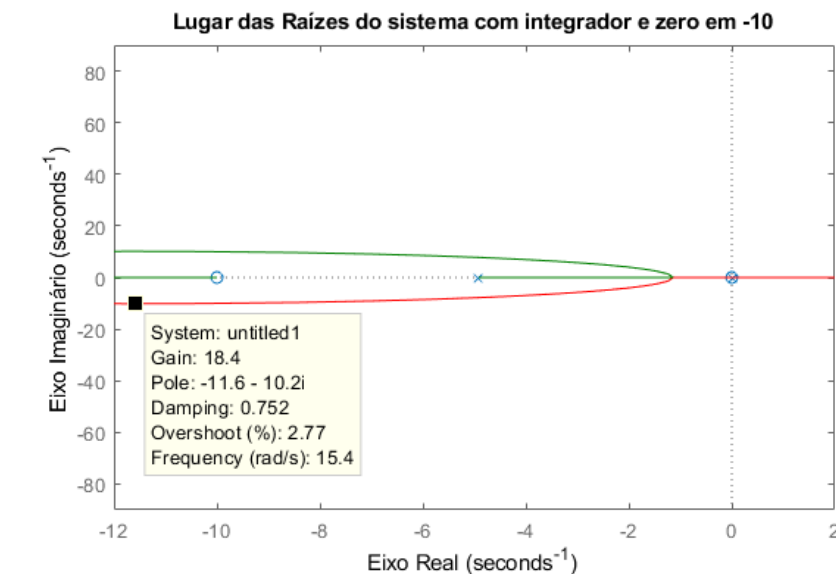
É possível perceber através da Figura 18(a) a presença da assíntota aproximadamente em -47, assim como estimado pela equação (40) com o zero em -1. Mas o foco da análise acontece próximo a origem, onde ocorre o comportamento dos polos dominantes. Foi destacado na Figura 18(b) o ponto com ganho 141 e polo -0,848, ou seja,  $k_p = 144$  e  $k_i = 144$  e aproximadamente na fronteira de um tempo de acomodação de 5 segundos de acordo com a equação (8).

Observando a Figura 19(a) é possível notar que a resposta seguiu as expectativas: satisfaz as condições de controle e com tempo de acomodação dentro da margem prevista. Enquanto a Figura 19(b) que mostra a resposta da simulação exibe um formato de onda parecido, mas não satisfaz a condição de controle do tempo de acomodação, que em seu caso é de aproximadamente 16 segundos, apesar de apresentar um sobressinal menor.



**Figura 19 – Resposta ao degrau do sistema com controlador PI, com  $k_p = 141$  e  $k_i = 141$ . (a)Gráfico gerado pelo *Matlab* (b)Gráfico gerado pela simulação do *Simulink*.**

No segundo caso foi escolhido um zero localizado em -10. Dessa vez, o local das raízes com todos os polos e assíntotas foi omitido, com o foco no comportamento mais próximo à origem. Com o ganho escolhido como o indicado na Figura 20, de 18 (próximo ao ponto 18,4 indicado na figura) e polo  $-11,3-j10,1$ , o que indica que a resposta apresentará um comportamento subamortecido, e os parâmetros PI serão:  $k_p = 18$  e  $k_i = 180$ .



**Figura 20 - Lugar das raízes com integrador e zero em -10, com indicação do ganho escolhido.**

É possível notar pela Figura 21(a) que não satisfaz as condições de controle pela especificação de sobressinal, enquanto a Figura 21(b) referente à simulação satisfaz as condições de controle, apesar de novamente possuir tempo de acomodação maior.

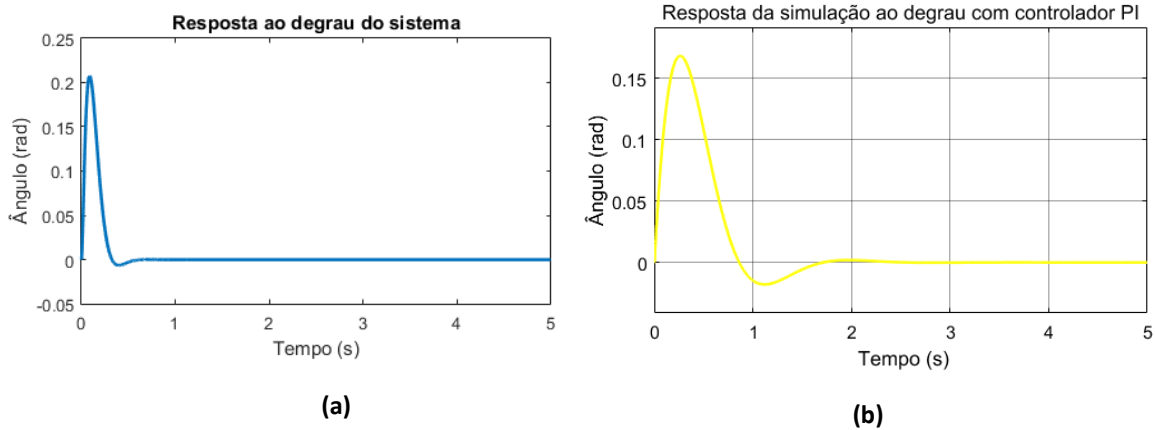


Figura 21 – Resposta ao degrau do sistema com controlador PI, com  $k_p = 18$  e  $k_i = 180$ . (a) Gráfico gerado pelo *Matlab* (b) Gráfico gerado pela simulação do *Simulink*.

### 5.5. Análise do sistema em malha fechada com controlador PID

Ao adicionar um integrador e dois zeros ao controlador, o resultado é exatamente um controlador PID, assim como já visto anteriormente. Nesse caso, muitas combinações e testes poderiam ser feitos e muitos padrões de assíntotas e respostas que satisfazem as condições de controle poderiam ser encontrados, e esta é uma vantagem da interface: oferecer ao usuário facilidade no momento de escolher os parâmetros e observar rapidamente suas mudanças nas respostas fornecidas.

Para exemplificar um controlador PID para o sistema, foram escolhidos zeros em -10 e -15 e ganho 1.5 (próximo ao 1,42 indicado na figura), assim como mostrado pela Figura 22. Dessa forma, os parâmetros PID resultantes são:  $k_p = 37,5$ ,  $k_i = 225$  e  $k_d = 1,5$ .

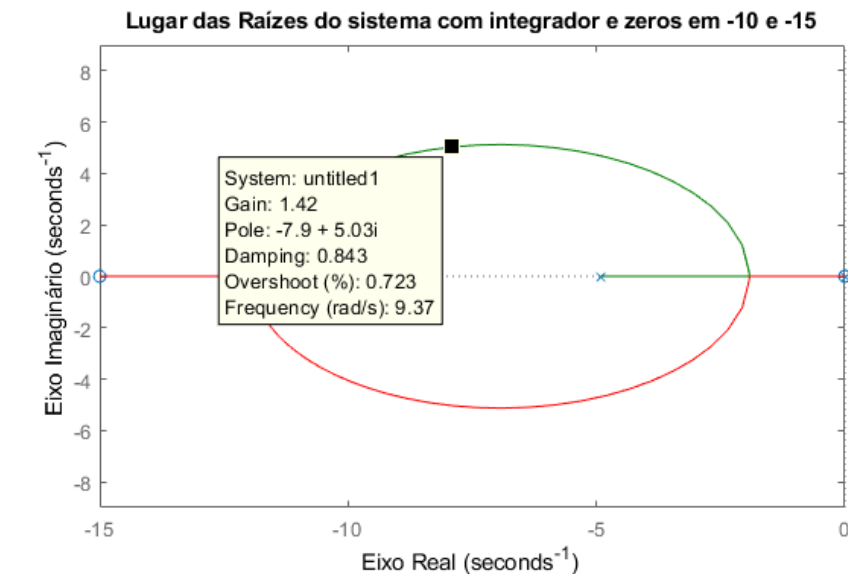
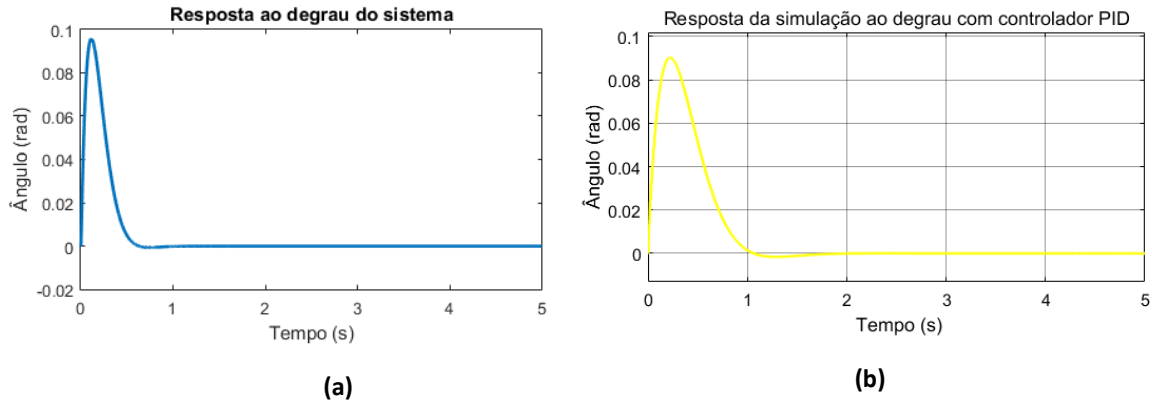


Figura 22 - Lugar das raízes com controlador PID com os parâmetros  $k_p = 37,5$ ,  $k_i = 225$  e  $k_d = 1,5$

É possível notar que as respostas satisfazem as condições de controle, assim como demonstrado pela Figura 23. Além disso, é possível notar diferenças entre as respostas já vistas em outros casos, como um menor sobressinal do gráfico de resposta da simulação, enquanto o gráfico de resposta devolvido pelo ambiente do *Matlab* possui um tempo de acomodação menor. Apesar disso, novamente as duas respostas tem comportamento subamortecido, devido ao ganho escolhido, de polo  $-8,08+j4.99$ .



**Figura 23 – Resposta ao degrau do sistema com controlador PID, com  $k_p = 37,5$ ,  $k_i = 225$  e  $k_d = 1,5$ . (a) Gráfico gerado pelo Matlab (b) Gráfico gerado pela simulação do Simulink.**

## 5.6. Considerações finais

Com a simulação no *Simulink* é possível obter outros parâmetros não analisados neste trabalho, mas com relevância para estudos em potenciais práticas de laboratório com o pêndulo invertido e sistemas reais. Na Figura 24 é possível notar o gráfico de resposta do sistema ao controlador PID visto anteriormente, porém a saída do sistema é a posição do carrinho. Desta forma, é possível notar que com os parâmetros escolhidos, o sistema, apesar de ter o controle da haste estabilizado, não é fisicamente possível na realidade, já que o carrinho ficaria se movendo infinitamente na direção negativa do eixo x para estabilizar o pêndulo. Assim em outros trabalhos é possível incluir o aspecto da estabilização do carrinho em torno da referência na origem, por exemplo, e com especificações próprias. Outros parâmetros de controlador vistos neste trabalho fornecem uma estabilização melhor do carrinho, mas por pura coincidência, o que não satisfaz a realização de um projeto de controle.

Outro parâmetro importante é o apresentado na Figura 25, que representa o comportamento da tensão de armadura  $e_a$  do motor cc. É possível notar que a tensão parte de 5 V, já que esse é o valor do degrau aplicado ao sistema e depois se estabiliza em aproximadamente  $e_a = -4,916$  V. Logo, com motores muito comuns com faixa de tensão limitada em  $\pm 12$  V, esse projeto de controlador satisfaria as condições da máquina. Tais

especificações em relação a limitação da faixa de tensão poderiam ser adicionadas em outros trabalhos, com o propósito de criar um sistema possível, nas limitações da máquina.

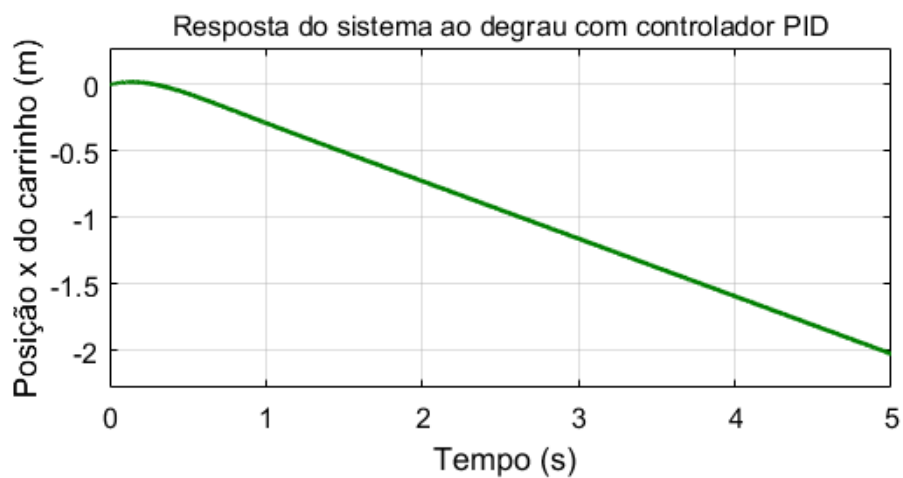


Figura 24 – Resposta da simulação física ao degrau em malha fechada com controlador PID, com  $k_p = 37,5$ ,  $k_i = 225$  e  $k_d = 1,5$ .

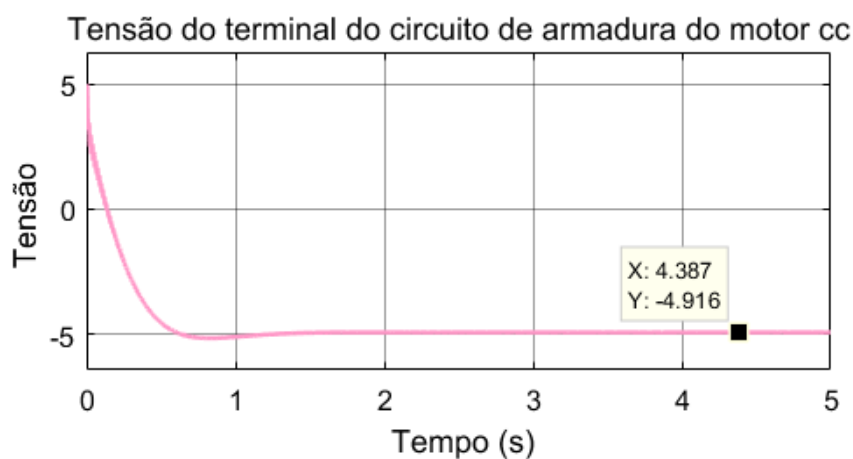


Figura 25 – Comportamento da curva de tensão  $e_a$  do terminal do circuito de armadura do motor cc, com controlador PID, com  $k_p = 37,5$ ,  $k_i = 225$  e  $k_d = 1,5$ .



## ***6. Conclusões***

Como foi visto anteriormente, o sistema de terceira ordem do pêndulo invertido apresenta uma determinada complexidade em seu controle, desvendado com um controlador PID. Foi visto que tal sistema é naturalmente instável devido a possuir um polo no semi-plano direito do eixo real do local das raízes e que um controlador P ou PD não resolvia o problema. Porém um controlador PI, que adiciona zero e desloca o local das raízes para a direita já melhora a resposta em malha-fechada, de acordo com as especificações de controle. Um controlador PID oferece ainda mais margem de melhora ao sistema, já que adiciona 2 zeros à solução e ajustado o ganho, é possível obter vários conjuntos de parâmetros proporcional, integrativo e derivador que satisfazem as especificações.

É possível notar que a interface gráfica para controle de sistemas pode ser uma ferramenta que agrega bastante para entendimento do sistema e das próprias ferramentas de controle. Através da análise dos gráficos no domínio do tempo e do local das raízes, obtém-se visão estratégica sobre o controle do sistema, visualizando o impacto do acréscimo de zeros e polos no sistema, além da participação dos polos dominantes na resposta.

Para futuros outros trabalhos, pode-se adicionar outras facetas ao controle do sistema do pêndulo invertido, como a utilização de outros controladores, lineares e não-lineares, o controle do carrinho, em sistemas físicos que tornem imprescindível a estabilização do movimento do carrinho em uma engrenagem, dos limites da máquina, como a corrente e tensão de armadura, que possuem uma faixa limite de operação, dentre outras.

## **7. Referências Bibliográficas**

FRANKLIN, Gene F.; POWELL, J. David; EMAMI-NAEINI, Abbas. **Sistemas de controle para engenharia**. Bookman Editora, 2013.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. Tradução de Heloísa Coimbra Souza. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

KRAFES, S.; CHALH, ; SAKA, A. **Review: Linear, nonlinear and intelligent controllers for the inverted pendulum problem**. 2016 International Conference on Electrical and Information Technologies (ICEIT). [S.l.]: IEEE. 2016. p. 136-141.

WANG, Jia-Jun. Simulation studies of inverted pendulum based on PID controllers. **Simulation Modelling Practice and Theory**, v. 19, n. 1, p. 440-449, 2011.

WASZAK, Michał; LANGOWSKI, Rafał. **An automatic self-tuning control system design for an inverted pendulum**. IEEE Access, v. 8, p. 26726-26738, 2020.

ABDELAAL, Mohamed E.; EMARA, Hassan M.; BAHGAT, A. **Interval type 2 fuzzy sliding mode control with application to inverted pendulum on a cart**. In: 2013 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT). IEEE, 2013. p. 100-105.

YAKOUB, Zaineb et al. **A combination of backstepping and the feedback linearization for the controller of inverted pendulum**. In: 10th International Multi-Conferences on Systems, Signals & Devices 2013 (SSD13). IEEE, 2013. p. 1-6.

KRIVICKAS, Romanas V.; KRIVICKAS, Jonas. Laboratory instruction in engineering education. **Global J. Eng. Educ**, v. 11, n. 2, p. 191-196, 2007.

SADIKU, N. O.; ALEXANDER,. **Fundamentos de circuitos elétricos**. Tradução de José Lucimar Nascimento. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013. 874 p.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistema de Controle Modernos**. 12<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

NISE, Norman S.; DA SILVA, Fernando Ribeiro. **Engenharia de sistemas de controle**. LTC, 2002.

OLIVEIRA, V. A.; AGUIAR, M. L.; VARGAS, J. B. **Engenharia de controle: fundamentos e aulas de laboratório**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2016.

MA, Jing; NICKERSON, Jeffrey V. **Hands-on, simulated, and remote laboratories: A comparative literature review**. ACM Computing Surveys (CSUR), v. 38, n. 3, p. 7-es, 2006.

OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S. **Sinais e Sistemas**. Tradução de Daniel Vieira e Rogério Bettoni. 2ª. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. 520 p.