

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE PRODUÇÃO
CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM SISTEMA DE SECAGEM
DE UM SECADOR DE PLANTAS MEDICINAIS E AROMÁTICAS**

MAURO DE OLIVEIRA PRATES

VIÇOSA
MINAS GERAIS – BRASIL
ABRIL/2006

MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM SISTEMA DE SECAGEM DE UM SECADOR DE PLANTAS MEDICINAIS E AROMÁTICAS

MAURO DE OLIVEIRA PRATES

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Viçosa para a obtenção dos créditos referentes à disciplina Monografia e Seminário do curso de Engenharia Elétrica.

Prof. André Gomes Tôrres
(Membro)

Prof. Denílson Eduardo Rodrigues
(Membro)

Prof. David Calhau Jorge
(Coordenador da Disciplina)

Prof. Tarcísio de Assunção Pizzolo
(Orientador)

*Dedico a meus pais José Prates e
Maria Lúcia e a meus irmãos
Clodoaldo, Rildo e Felipe.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer aos meus pais José da Silva Prates e Maria Lúcia de Oliveira por sempre confiarem e acreditarem nas minhas decisões, principalmente as relativas a estudo. Agradeço também pelo constante apoio deles e também de meus irmãos Clodoaldo, Rildo e Felipe.

Ao meu orientador, Tarcísio de Assunção Pizziolo, deixo um agradecimento especial pela escolha do tema, por me orientar e por acreditar na minha capacidade para a realização deste trabalho.

Gostaria de agradecer também ao professor André Gomes Tôrres, por toda sua paciência em me ensinar o modelo ARX e também ao professor Evandro de Castro Melo, por ceder o Laboratório de Secagem para minha pesquisa.

Às colegas Carolina Pessanha e Diana Lemos pelo auxílio nas atividades para a obtenção dos valores de temperaturas medidos.

Aos amigos de classe agradeço por me ajudarem e me apoiarem em muitos momentos durante a graduação, inclusive para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos da República 1822 agradeço pela convivência destes anos que passamos.

A Deus por me conceder sabedoria e forças para executar este trabalho e vida para que hoje eu possa agradecer a todas estas pessoas.

RESUMO

MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM SISTEMA DE SECAGEM DE UM SECADOR DE PLANTAS MEDICINAIS E AROMÁTICAS

Resumo: *O presente trabalho tem como objetivo a modelagem matemática de um sistema de secagem de um secador de plantas medicinais e aromáticas. Para a modelagem foi necessário estimar parâmetros tais como resistência e capacitância térmica do secador, bem como a sua potência de entrada. Para essa estimação foram utilizados os dados de temperatura obtidos pelo conjunto do sistema de secagem. Através das leis da termodinâmica conseguiu-se estimar três parâmetros: capacitância térmica, resistência térmica e a potência de entrada do secador. A resistência térmica devido à vazão na exaustão foi estimada utilizando-se o modelo auto-regressivo com entradas externas (ARX) através de simulação. Depois da estimação dos parâmetros foi feita uma sintonia do modelo através da variação dos parâmetros encontrados. Após isso, o modelo foi validado utilizando-se novos dados de temperatura. Finalmente, foi feita uma comparação dos modelos da Função de Transferência, do Espaço de Estados e do ARX com os dados reais de temperatura obtidos.*

Palavras-chave: *Modelagem matemática, Secagem, Plantas medicinais e aromáticas.*

ABSTRACT

MATHEMATICAL MODELING OF A DRY SYSTEM OF A MEDICINAL AND AROMATIC PLANT DRIER

Abstract: The current work has as objective the mathematical modeling of a dry system of a medicinal and aromatic plant drier. For the modeling was necessary estimate the parameters just like resistance and thermal capacitance of the drier, besides it's power of entrance. For this estimation were applied the temperature data acquired by the conjunct of the dry system. Through the laws of thermodynamic it obtained three estimate parameters: thermal capacitance, thermal resistance and the drier power of entrance of dry system. The thermal resistance due to the flow at the exhaustion was estimated using the autoregressive with exogenous inputs (ARX) model thought simulation. After the estimation of the parameters, a tune of the model through the variation of the parameters found was done. After this, the model was validated using new temperature data. Finally, was done a comparison of Transference Function, State Space and the ARX models with the real temperature data obtained.

Keywords: Mathematical Modeling, dry, medicinal and aromatic plant

Lista de Figuras

Figura 1 – Diagrama de Blocos de um sistema. _____	18
Figura 2 - Representação esquemática do modelo ARX. _____	24
Figura 3 – Resposta ao degrau para um sistema de primeira ordem. _____	26
Figura 4 - Calor transmitido no caso de condução térmica. _____	31
Figura 5 – Calor transmitido por convecção térmica. _____	32
Figura 6 - Vista frontal do secador. _____	34
Figura 7 - Corte frontal do secador. _____	35
Figura 8 – Diagrama esquemático do secador. _____	36
Figura 9 – Localização dos termopares no secador. _____	40
Figura 10 - Temperaturas obtidas com o termopar 4. _____	41
Figura 11 – Trecho da curva de temperatura medida com o termopar 5. _____	43
Figura 12 – Temperatura no termopar 5 com o sistema desligado. _____	45
Figura 13 – Comparação dos dados medidos com o Modelo ARX estimado. _____	46
Figura 14 – Sinal de temperatura medido e simulado com o modelo não sintonizado. _____	48
Figura 15 – Sinal de temperatura medido e simulado com o modelo sintonizado. _____	49
Figura 16 - Comparação dos modelos da FT, Espaço de Estados e ARX com os dados reais. _____	50

Abreviações

FT Função de Transferência

ARX Modelo auto-regressivo com entradas exógenas
(*Autoregressive with Exogenous Inputs*)

Sumário

<i>Lista de Figuras</i>	7
<i>Abreviações</i>	8
1 Introdução	10
1.1 Objetivos	11
1.2 Organização do texto	11
2 Modelagem Matemática de Sistemas Dinâmicos	12
2.1 Introdução	12
2.2 Definição	13
2.3 Considerações freqüentemente feitas em modelagem	13
2.4 Representações de Modelos Lineares	15
2.4.1 Função de Transferência	16
2.4.2 Modelagem no Espaço de Estados	18
2.4.3 Modelo ARX	23
2.5 Resposta ao degrau para sistemas de primeira ordem	25
2.6 Modelagem Analítica de Sistemas Térmicos	27
3 Materiais e Métodos	34
3.1 Secador utilizado	34
3.2 Obtenção dos Modelos Matemáticos	36
3.2.1 Função de Transferência	36
3.2.2 Espaço de Estados	38
3.2.3 Modelo ARX	39
3.3 Ensaio de secagem	40
4 Resultados e Discussões	42
4.1 Estimação dos Parâmetros	42
4.1.1 Capacitância térmica da estufa	42
4.1.2 Potência fornecida ao secador	42
4.1.3 Resistência térmica da estufa devido à parede do secador	44
4.1.4 Resistência térmica da estufa devido à vazão de ar na exaustão	45
4.2 Sintonia do Modelo	47
4.3 Validação do Modelo	49
4.3.1 Comparação dos modelos matemáticos com os dados reais	50
5 Conclusões	52
6 Referências Bibliográficas	53

1 Introdução

Os constituintes voláteis aromáticos presentes nas plantas medicinais são os componentes mais sensíveis ao processo de secagem. O efeito da secagem sobre a composição de substâncias voláteis tem sido pesquisado, buscando demonstrar que as variações nas concentrações de seus constituintes, durante a secagem, dependem de vários fatores, tais como o método de secagem, temperatura do ar empregada, características fisiológicas, além de conteúdo e tipo de componentes químicos presentes nas plantas submetidas à secagem [1].

A secagem pode aumentar o número de modificações físicas e químicas negativas, alterando a qualidade da matéria prima para a sua comercialização, como por exemplo, mudanças em aparência (coloração), cheiro e possíveis perdas de constituintes voláteis [2]. Para muitas plantas medicinais e aromáticas é totalmente desaconselhada a secagem ao sol, visto que o processo de fotodecomposição ocorre intensamente, degradando os componentes químicos e ocasionando alterações de odor, cor e sabor [3].

Em uma extensa revisão realizada por Melo et al. (2004) sobre a influência do processo de secagem na qualidade de plantas medicinais, pôde-se concluir que o método de secagem, a velocidade e temperatura do ar exercem influência na quantidade e qualidade dos princípios ativos, presentes em plantas medicinais, aromáticas e condimentares [4].

Portanto, torna-se de fundamental importância pesquisas sobre a influência da temperatura do ar de secagem no teor e na composição dos princípios ativos das plantas medicinais.

A modelagem matemática do sistema de secagem do secador de plantas medicinais e aromáticas nos possibilita analisar e determinar o comportamento do sistema dinâmico do secador, procurando preservar as características naturais das plantas e buscar uma alta eficiência durante a secagem.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é a realização da modelagem matemática de um sistema de secagem de um secador de plantas medicinais e aromáticas localizado na Área de Armazenamento da Universidade Federal de Viçosa, utilizando-se três representações de modelos lineares: Função de Transferência, Método de Espaço de Estados e o modelo ARX.

Tem-se com objetivo específico a comparação dos modelos utilizados com a dinâmica real do processo modelado.

1.2 Organização do texto

Esse trabalho foi dividido em 6 capítulos e organizados da seguinte forma: o capítulo 2 é uma revisão sobre modelagem matemática de sistemas dinâmicos detalhando três representações de modelos lineares: Função de Transferência, Método de Espaço de Estados e o modelo ARX. Nesse capítulo descreve-se também conceitos sobre a resposta ao degrau para sistemas de primeira ordem e finaliza mostrando-se a modelagem analítica de sistemas térmicos.

O capítulo 3 trata da metodologia utilizada para a realização do trabalho. Nele é apresentado o secador de onde foi monitorada a temperatura. Além disso são deduzidas as equações dos modelos matemáticos da FT, do Espaço de Estados e ARX. Descreve-se também como foram realizados os ensaios de secagem.

O capítulo 4 mostra os resultados obtidos. Primeiro é feita a estimação dos parâmetros do sistema e então é realizada a sintonia do modelo variando-se os parâmetros encontrados para melhorar o modelo. Depois é realizada a validação do modelo utilizando-se de novos valores de temperatura e então é feita a comparação dos modelos com os dados reais. O capítulo 5 trata das conclusões extraídas do trabalho e o capítulo 6 traz as referências bibliográficas.

2 Modelagem Matemática de Sistemas Dinâmicos

2.1 Introdução

Modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de desenvolver e implementar modelos matemáticos de sistemas reais. Há várias formas e técnicas de se obter modelos matemáticos, uma delas é a *modelagem caixa branca*. Nesse caso, faz-se necessário conhecer a fundo o sistema a ser modelado. Além de estar bem familiarizado com o sistema, para esse tipo de modelagem é necessário conhecer as relações matemáticas que descrevem os fenômenos envolvidos. Infelizmente, devido ao conhecimento e tempo necessário para modelar um sistema partindo do equacionamento dos fenômenos envolvidos, nem sempre é viável seguir esse procedimento de modelagem.

Identificação de sistemas é uma área do conhecimento que estuda técnicas alternativas de modelagem matemática. Uma das características dessas técnicas é que pouco ou nenhum conhecimento prévio do sistema é necessário e, conseqüentemente, tais métodos são também referidos como *modelagem caixa preta*. Em muitos casos será preferível usar técnicas de identificação de sistemas. Nesse caso, o tipo de modelo, as técnicas usadas e os requisitos necessários são bastante distintos dos análogos na modelagem caixa branca [5].

Assim, é importante observar que um modelo matemático não é único para determinado sistema. Um sistema é representado de muitas maneiras diferentes e, portanto, pode ter vários modelos matemáticos, dependendo da perspectiva a ser considerada. Por exemplo, nos sistemas de controle ótimo, é vantajoso utilizar representações do modelo de estado. Por outro lado, para a análise da resposta transitória ou da resposta em frequência de um sistema linear, invariante no tempo, de entrada e saídas únicas, a representação pela função de transferência pode ser mais conveniente do que qualquer outra. Uma vez obtido o modelo matemático de um sistema, podem ser utilizadas várias ferramentas analíticas e de computação para efeito de análise e síntese [6].

2.2 Definição

Um modelo matemático de um sistema real é um análogo matemático que representa algumas das características observadas em tal sistema. É importante perceber que a modelagem matemática possui *algumas* das características da construção real, *mas não todas*. Existem modelos com propriedades bastante diferentes e o uso desses vai depender do objetivo para o qual o modelo está sendo desenvolvido.

Modelos matemáticos têm sido utilizados ao longo da história para os mais diversos fins, como por exemplo: entender e explicar fenômenos observados tanto na natureza quanto em sistemas sociais, biomédicos, equipamentos etc.; projeto de sistemas de monitorização e controle; predição; estimação de estados; simulação e treinamento.

Uma outra questão importante a ser abordada é o da escolha do tipo de modelo a ser utilizado. Como antes, tal escolha não é única e depende do objetivo em vista, do volume de informação e tempo disponível para desenvolver o modelo.

2.3 Considerações freqüentemente feitas em modelagem

Dois fatos devem estar sempre presentes ao modelador matemático. Em primeiro lugar, o modelo desenvolvido para um determinado sistema é apenas uma *representação aproximada*. Conseqüentemente, não existe o modelo do sistema, mas sim uma família de modelos com características e desempenhos variados. A decisão de qual desses modelos escolher é um dos problemas não triviais com o qual o modelador se defrontará. Em segundo lugar, o modelo é uma aproximação de *apenas algumas* características do sistema real. Em outras palavras, pretender desenvolver um modelo que contenha muitas das características do sistema real é um alvo normalmente inatingível.

A fim de desenvolver modelos aproximados, normalmente fazem-se considerações simplificadoras. Quando o modelo estiver pronto e for testado, se o seu

desempenho for considerado inadequado, uma coisa a fazer é reavaliar a pertinência das considerações feitas durante o seu desenvolvimento. Ao modelar um sistema dinâmico é preciso relacionar:

- **Sistemas contínuos no tempo e discretos no tempo**

Aqui os termos *discreto* e *contínuo* se referem ao tempo. Modelos dinâmicos contínuos são descritos por equações diferenciais e representam a evolução do sistema continuamente no tempo. Em contraste, modelos dinâmicos discretos no tempo representam a evolução do sistema em instantes discretos e são descritos por equações a diferenças. A maioria dos métodos determinísticos de identificação fornece modelos contínuos, ainda que os dados sejam amostrados. Por outro lado, a grande maioria dos métodos estocásticos de identificação resultam em modelos discretos no tempo, ainda que praticamente todos os sistemas reais sejam contínuos no tempo [5].

- **Simplicidade *versus* precisão:**

Na obtenção de um modelo matemático devemos estabelecer uma conciliação entre a simplicidade e a precisão do modelo e a precisão dos resultados da análise. Na obtenção de um modelo matemático relativamente simplificado, com freqüência, torna-se necessário ignorar certas propriedades físicas inerentes ao sistema. Em particular, se for desejável um modelo matemático linear de parâmetros concentrados (isto é, se quisermos empregar equações diferenciais ordinárias), é sempre necessário ignorar certas não-linearidades e os parâmetros distribuídos que podem estar presentes no sistema físico. Se os efeitos que essas propriedades ignoradas têm na resposta forem pequenas, pode-se obter boa aproximação entre os resultados da análise de um modelo matemático e os resultados do estudo experimental físico.

Em geral, na solução de um novo problema, é conveniente construir um modelo simplificado para que possamos ter uma percepção geral em relação à solução. Um modelo matemático mais completo pode, então, ser construído e utilizado para que sejam obtidas análises mais precisas.

- **Sistemas lineares invariáveis no tempo versus os variáveis no tempo**

Uma equação diferencial é linear se os coeficientes forem constantes ou somente funções da variável independente. Os sistemas dinâmicos compostos por componentes lineares de parâmetros concentrados invariantes no tempo podem ser descritos por equações diferenciais lineares invariantes no tempo (de coeficientes constantes). Esses sistemas são denominados sistemas *lineares invariantes no tempo* (ou *lineares de coeficientes constantes*). Os sistemas representados por equações diferenciais, cujos coeficientes são funções de tempo são chamados de sistemas *lineares variantes no tempo*. Um exemplo de sistema de controle variante no tempo é um sistema de controle de veículo espacial. (A massa de um veículo espacial muda devido ao consumo do combustível).

- **Sistemas lineares versus sistemas não-lineares**

Um sistema é dito linear se o princípio da superposição se aplicar a ele. O princípio da superposição afirma que a resposta produzida pela aplicação simultânea de duas funções diversas é a soma das duas respostas individuais [6]. A consideração de linearidade normalmente simplifica bastante o modelo a ser desenvolvido. Entretanto, há situações em que esta consideração não é adequada, como, por exemplo, para sistemas com dinâmica fortemente bilinear (que não podem ser descritos adequadamente por um único modelo linear, independentemente de quão estreita seja a faixa de operação considerada); e no caso em que se deseja estudar características dinâmicas não-lineares do sistema, tais como oscilações e bifurcações.

2.4 Representações de Modelos Lineares

Um modelo matemático de um sistema é um análogo de tal sistema. Há diversas maneiras de se representar o mesmo modelo matemático, ou seja, há várias formas em que as equações que descrevem o comportamento do sistema podem ser descritas. Será chamada de *representação* ou *modelagem* a forma em que um modelo matemático é expresso.

Uma das representações mais importantes na modelagem de sistemas dinâmicos lineares é a função de transferência. Uma outra maneira muito útil de se expressar um modelo dinâmico linear é usando-se representação em espaço de estados. Essas duas representações serão apresentadas nesse trabalho no contexto de sistemas contínuos no tempo, mas existem análogos para o caso de tempo discreto, como é o caso do modelo auto-regressivo com entradas externas (ARX do inglês *autoregressive with exogenous inputs*) que também será mencionado [5].

2.4.1 Função de Transferência

Na teoria de controle, as funções de transferência são comumente utilizadas para caracterizar as relações de entrada e saída de componentes ou de sistemas, que podem ser descritos por equações diferenciais lineares invariantes no tempo.

Definição: A *Função de Transferência* de um sistema representado por uma equação diferencial linear invariante no tempo é definida como a relação entre a transformada de Laplace da saída (função de resposta – *response function*) e a transformada de Laplace de entrada (função de excitação – *driving function*), admitindo-se todas as condições iniciais nulas.

Considere o sistema linear invariante no tempo, definido pela seguinte equação diferencial:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 \dot{x} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x \quad (n \geq m) \quad \text{eq. 1}$$

onde y é a saída do sistema e x é a entrada. A função de transferência desse sistema é a relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada, quando todas as condições iniciais são zero ou

$$\text{Função de transferência} = G(s) = \left. \frac{\mathcal{L}\{saída\}}{\mathcal{L}\{entrada\}} \right|_{\text{Condições iniciais nulas}}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad \text{eq. 2}$$

Utilizando-se o conceito de função de transferência, é possível representar a dinâmica de um sistema por meio de uma equação algébrica em s , como na eq. 2. Se a maior potência de s no denominador da função de transferência for igual a n , o sistema será denominado *sistema de ordem n* [6].

Assim, seja uma função de primeira ordem do tipo:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} = \frac{(K/\tau)}{s + 1/\tau} \quad \text{eq. 3}$$

onde K é definido como o *ganho*, cujo valor afeta o valor final da resposta e τ é definido como a *constante de tempo do sistema* (quando a resposta é 0.632 do seu valor final). O polinômio do denominador $X(s)$, quando igualado a zero, é chamado de *polinômio característico* porque as raízes desta equação, denominadas de *pólos*, determinam o caráter da resposta temporal do sistema. Por isso o pólo simples da FT é obtido facilmente igualando-se o denominador da eq. 3 a zero, obtendo $s = -1/\tau$ [7].

Observações sobre a função de transferência:

1. A função de transferência inclui as unidades necessárias para relacionar a entrada e saída; entretanto, não fornece nenhuma informação relativa à estrutura física do sistema. (As funções de transferência de diversos sistemas físicos diferentes podem ser idênticas).
2. Se a função de transferência de um sistema for conhecida, a saída ou resposta poderá ser estudada para várias maneiras de entrada, visando ao entendimento da natureza do sistema.
3. Se a função de transferência de um sistema não for conhecida, ela pode ser determinada experimentalmente com o auxílio de entradas conhecidas e do

estudo das respectivas respostas do sistema. Uma vez determinada, a função de transferência fornece uma descrição completa das características dinâmicas do sistema, independente de sua descrição física[6].

2.4.2 Modelagem no Espaço de Estados

Esse tipo de representação descreve o sistema no domínio do tempo e é mais conveniente para representar sistemas não-lineares e multivariáveis do que a FT. Um modelo linear típico em espaço de estados tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & \dots & \text{(eq. de estado)} \\ y &= Cx + Du & \dots & \text{(eq. de saída)} \end{aligned} \quad \text{eq. 4}$$

Sendo que $x \in \mathcal{R}^n$ é o vetor de estado n-dimensional; o ponto indica a derivada temporal, ou seja, $\dot{x} = dx/dt$; $u(t) \in \mathcal{R}^r$ é o vetor de entradas formado por r funções temporais; $y(t) \in \mathcal{R}^p$ é o vetor p-dimensional de saídas medidas e A, B, C e D são matrizes constantes [5].

Assim, seja o sistema mostrado na Figura 1, onde $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são os sinais de saída e $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são os sinais de entrada. Um conjunto de variáveis (x_1, x_2, \dots, x_n) é um conjunto tal que o conhecimento dos valores iniciais das variáveis de estado $[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]$ no instante t_0 e dos sinais de entrada $u_1(t)$ e $u_2(t)$ para $t \geq t_0$, é suficiente para determinar os valores futuros das saídas e das variáveis de estado[8].

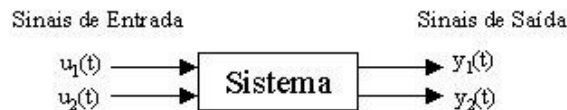


Figura 1 – Diagrama de Blocos de um sistema.

Duas observações importantes sobre a modelagem em espaço de estados são: i) o conhecimento do vetor de estado em qualquer instante t_0 especifica o *estado* ou *condição* do sistema nesse instante; ii) a modelagem em espaço de estados não é única.

Ou seja, é possível representar o mesmo sistema com mais de um modelo no espaço de estados.

O modelo da eq. 4 será multivariável se $r > 1$ e/ou $p > 1$. Se houver apenas uma entrada $r = 1$ e uma saída $p = 1$, o modelo é dito monovariável [5].

- Modelo *monovariável*, ou seja, a função de entrada não possui derivadas:

Considere o seguinte sistema de ordem n:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u \quad \text{eq. 5}$$

Observando-se que o conhecimento de $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$, junto com a entrada $u(t)$ para $t \geq 0$, determina-se completamente o comportamento futuro do sistema, podendo-se considerar $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ como um conjunto de n variáveis de estado. Definindo:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

a eq. 5 pode ser escrita do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u \end{aligned}$$

ou

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{eq. 6}$$

onde:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A saída pode ser dada por:

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou $y = Cx$ eq. 7

onde $C = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$

[Note que D na eq. 4 é zero]. A equação diferencial de primeira ordem, eq. 6, é a equação de estado e a equação algébrica, eq. 7, é a equação de saída.

- Modelo *multivariável*, ou seja, a função de entrada possui derivadas:

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais que possui derivadas na função de entrada, como:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 \dot{u}^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad \text{eq. 8}$$

O principal problema na definição de variáveis de estado nesse caso ocorre nos termos com derivadas. As variáveis de estado devem ser tais que eliminem as derivadas de u na equação de estado.

Uma maneira de obter a equação de estado e a equação de saída é definir as seguintes n variáveis como um conjunto de n variáveis de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u \end{aligned} \quad \text{eq. 9}$$

onde $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ são determinados a partir de

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 \\ &\vdots \\ \beta_n &= b_n - a_1 \beta_{n-1} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0 \end{aligned} \quad \text{eq. 10}$$

Com a escolha de variáveis de estado, a existência e a unicidade da solução da equação de estado estão garantidas. (Note que essa não é a única escolha de um conjunto de variáveis de estado). Com essa escolha, obtemos:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x} &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u
\end{aligned}
\tag{eq. 11}$$

Em termos de equações vetoriais-matriciais, a eq. 11 e a equação de saída podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [\beta_0] u$$

ou

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{eq. 12}$$

$$y = Cx + Du \tag{eq. 13}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad D = [\beta_0] = [b_0]$$

Com essa modelagem no espaço de estados, as matrizes A e C são exatamente as mesmas do modelo monovariável. As derivadas da eq. 8 afetam somente os elementos da matriz B [6].

2.4.3 Modelo ARX

Diferentemente dos anteriores, o modelo auto-regressivo com entradas externas (ARX) é uma representação matemática discreta no tempo e é descrito por equações a diferenças.

Considere o seguinte modelo geral para uma representação discreta:

$$A(q)y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}v(k) \quad \text{eq. 14}$$

Sendo q^{-1} o operador em atraso, de forma que $y(k)q^{-1} = y(k-1)$, $v(k)$ ruído branco, que é uma espécie de chiado incoerente que forma um fundo a toda sinalização eletrônica, e $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ e $F(q)$ os polinômios definidos a seguir:

$$\begin{aligned}
 A(q) &= 1 - a_1 q^{-1} - \dots - a_{n_y} q^{-n_y}; \\
 B(q) &= b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_u} q^{-n_u}; \\
 C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_v} q^{-n_v}; \\
 D(q) &= 1 + d_1 q^{-1} + \dots + a_{n_d} q^{-n_d}; \\
 F(q) &= 1 + f_1 q^{-1} + \dots + a_{n_f} q^{-n_f}.
 \end{aligned}
 \tag{eq. 15}$$

O modelo auto-regressivo com entradas externas pode ser obtido do modelo geral (eq. 14) tornando $C(q) = D(q) = F(q) = 1$ e $A(q)$ e $B(q)$ polinômios arbitrários, resultando em

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + v(k) \tag{eq. 16}$$

Uma vez que o ruído $v(k)$ aparece diretamente na equação, o modelo ARX é normalmente classificado como pertencendo à classe de modelo de erro na equação, podendo ser escrito da seguinte forma:

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{1}{A(q)}v(k) \tag{eq. 17}$$

Isto coloca em evidência as funções de transferência do sistema $H(q) = B(q)/A(q)$ e de ruído $C(q) / [D(q) A(q)] = 1 / A(q)$, conforme pode ser apreciado na Figura 2.

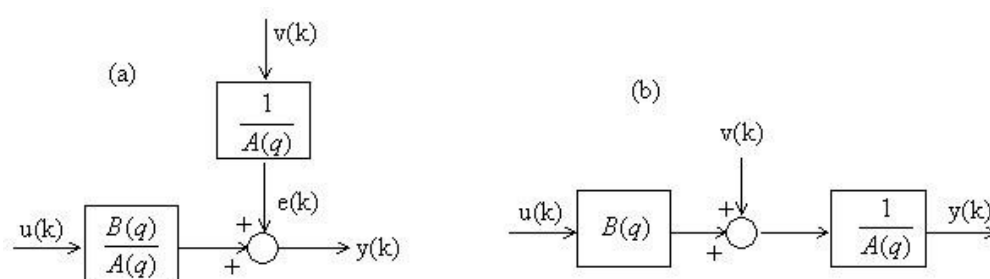


Figura 2 - Representação esquemática do modelo ARX.

A representação (a) na Figura 2 é equivalente à eq. 17 que, após algumas manipulações pode ser representada na forma indicada em (b). Do esquema em (b) fica claro que o erro não aparece na saída.

O ruído que aparece adicionado à saída, $e(k) = v(k)/A(q)$ não é branco, ou seja, nesta representação o ruído é modelado como um processo branco filtrado por um filtro auto-regressivo, com pólos idênticos aos do processo, que são raízes do polinômio $A(q)$. [5].

Mas para se conseguir chegar a uma equação a diferenças a partir uma FT é necessário passar do domínio contínuo para o discreto, ou seja, fazer o mapeamento $s \Leftrightarrow z$, utilizando-se de métodos baseados na aproximação da integração. Para esse tipo de mapeamento, dentre muitas outras, a *Transformação Bilinear* é a que produz um melhor resultado e por isso é a mais usada. Assim, de acordo com essa transformação, temos o seguinte mapeamento do plano s para o plano z:

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad e \quad z = \frac{2+sT}{2-sT} \quad \text{eq. 18}$$

onde s é uma variável complexa, z uma variável discreta e T o período entre duas amostras, conhecido como Tempo de Amostragem final [9].

2.5 Resposta ao degrau para sistemas de primeira ordem

Considere um sistema de primeira ordem com uma FT como o da eq. 3, mostrada novamente na eq. 19

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{(\tau s + 1)} \quad \text{eq. 19}$$

Neste caso, a transformada de Laplace da resposta é:

$$Y(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)} \quad \text{eq. 20}$$

Onde $1/s$ é a transformada de Laplace do degrau unitário. Através de um desenvolvimento em frações parciais obtemos:

$$Y(s) = K \left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{(\tau s + 1)} \right) \quad \text{eq. 21}$$

Ou, de forma equivalente:

$$y(t) = K(1 - \exp(-t/\tau)) \quad \text{eq. 22}$$

Esta função está representada graficamente na Figura 3, onde o parâmetro $a = 1/\tau$, ou seja, $\tau = 1/a$. Pode-se ver que depois de um tempo igual à constante de tempo, isto é, $t = \tau$, a resposta é 0.632 do seu valor final; depois de quatro constantes de tempo, $t = 4\tau$, a resposta é de 0.982K.

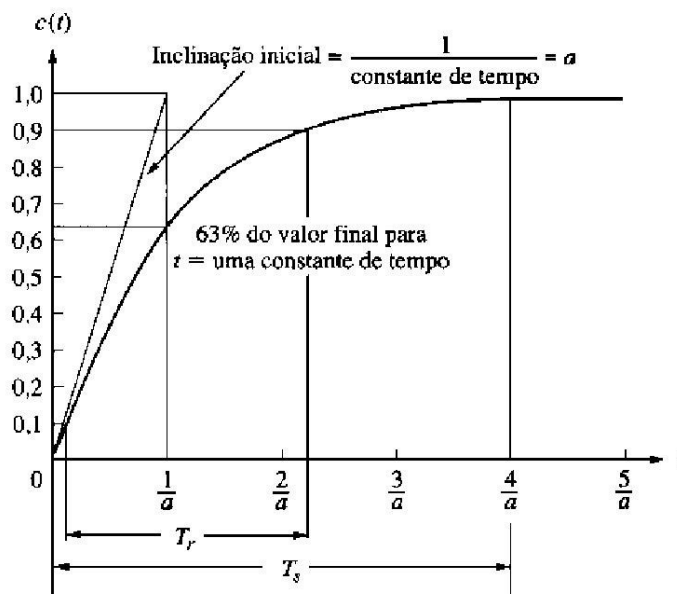


Figura 3 – Resposta ao degrau para um sistema de primeira ordem.

Na prática não podemos esperar um tempo infinito para que a resposta atinja o seu valor final. Portanto, é normalmente aceito que o estado estacionário tenha sido

atingido a partir do momento em que a resposta permanece dentro de um intervalo de $\pm 1.8\%$ do seu valor final. Esse instante é chamado *tempo de acomodação* (T_s) que corresponde a quatro constantes de tempo. A Figura 3 nos mostra também o tempo de subida (T_r) o qual é definido como o tempo necessário para que a forma de onda varie de 0,1 a 0,9 do seu valor final [10].

2.6 Modelagem Analítica de Sistemas Térmicos

Sistemas Térmicos são aqueles que envolvem transferência de calor de uma substância a outra. Os sistemas térmicos podem ser analisados em termos de resistência e capacitância térmicas.

A seguir, serão dadas definições de alguns parâmetros relacionados aos sistemas térmicos.

- ***Fluxo de calor***

Dois corpos com temperaturas diferentes T_1 e T_2 postos em contato fazem com que T_1 e T_2 se aproximem de uma temperatura comum. Diz-se que o calor foi transferido de um corpo para outro.

Assim, seja q o *fluxo de calor* e Q a quantidade de calor de um corpo, temos:

$$q = \frac{dQ}{dt} \quad \text{eq. 23}$$

- ***Potência Térmica e Energia***

A *Energia* é exatamente a quantidade calor existente em uma substância e a potência é o fluxo de calor, ou seja:

$$E(t) = Q$$

$$P = \frac{dE}{dt} = q \quad \text{eq. 24}$$

- **Capacitância Térmica**

A *capacitância térmica* ou capacidade calorífica (C) de um corpo é a quantidade de calor necessária para produzir um determinado acréscimo de temperatura no corpo ($\Delta T = 1^\circ C$). Corresponde à capacidade de um corpo armazenar calor:

$$C = \frac{\text{quantidade de calor fornecida ao corpo } (\Delta Q)}{\text{aumento de temperatura do corpo } (\Delta T)} \quad \text{eq. 25}$$

É usualmente medida em cal/ °C ou Kcal/°C, sendo que no SI (Sistema Internacional) ela é dada por J/K. Uma caloria (cal) corresponde à quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de 1 grama de água de 14,5°C a 15,5°C.

A palavra capacidade térmica não deve ser interpretada como sendo “a quantidade de calor que um corpo pode reter”, uma vez que ela significa, simplesmente, o calor fornecido a um corpo para elevar de uma unidade sua temperatura.

Um conceito importante associado com capacitância térmica é o de calor específico (c). O calor específico de um corpo corresponde à quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de uma unidade de massa desse corpo de um certo valor ($\Delta T = 1^\circ C$). O calor específico, bem como a capacitância térmica, dependem da substância que compõe o corpo.

$$c = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T} = \frac{C}{m} \quad \text{eq. 26}$$

Onde m = massa do corpo (Kg).

Sua unidade usual é $\text{cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C})$ ou $\text{Kcal}/(\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C})$, sendo que no SI é fornecido em $\text{J}/(\text{Kg} \cdot \text{K})$. Da definição de caloria se deduz que o calor específico da água é igual a $1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C})$ ou $1 \text{ Kcal}/(\text{Kg} \cdot ^\circ\text{C})$.

É importante ressaltar que tanto a capacitância térmica quanto o calor específico de uma dada substância não são constantes, mas dependem da temperatura. As equações anteriores fornecem apenas os valores médios dessas grandezas no intervalo de temperatura considerado (ΔT). A uma temperatura T , o calor específico de um corpo é definido como:

$$c = \frac{dQ}{m \cdot dT} \quad \text{eq. 27}$$

e a capacitância térmica é definida como:

$$C = \frac{dQ}{dT} \quad \text{eq. 28}$$

Apesar de ser uma função da temperatura, o calor específico pode ser considerado constante dentro de certos intervalos. Assim, por exemplo, desde que se desprezem as variações com a temperatura (na faixa de 0 a 100°C), o erro máximo que se comete ao considerar o calor específico da água como constante é de 0,8%.

Rearranjando-se a eq. 24, temos:

$$P = \frac{dE}{dT} = C \frac{dT}{dt} \quad \text{eq. 29}$$

- ***Transmissão de calor***

Antes de definir resistência térmica é interessante apresentar os processos de *transmissão de calor*, ou seja, o processo pelo qual a energia é transportada. Há três modos distintos de transmissão de calor: condução, radiação e convecção.

A *condução* é um processo pelo qual o calor flui de uma região de temperatura mais alta para outra de temperatura mais baixa, dentro de um meio (sólido, líquido ou gasoso) ou entre meios diferentes em contato físico direto.

A *radiação* é um processo pelo qual o calor é transmitido de um corpo a alta para um de mais baixa temperatura, quando tais corpos estão separados no espaço, ainda que exista vácuo entre eles (A transferência de calor por radiação é significativa somente se a temperatura do emissor for muito alta, comparada à do receptor. A maioria dos processos térmicos nos sistemas de controle de processos não envolve transferência de calor por radiação).

A *convecção* é um processo de transporte de energia pela ação combinada da condução de calor, armazenamento de energia e movimento de mistura. Ela é importante principalmente no mecanismo de transferência de energia entre uma superfície sólida e um líquido ou gás em movimento.

A transmissão de calor pode ser um processo permanente ou não. Quando um calor transferido por unidade de tempo em um sistema não depende do tempo, isto é, quando ele é constante, a temperatura em cada ponto não varia e as condições de regime permanente prevalecem. A maioria dos problemas de transmissão de calor na engenharia trata com sistemas em regime permanente. O fluxo de calor é transitório ou não permanente quando a temperatura em vários pontos do sistema varia com o tempo.

A relação básica para transmissão de calor por condução foi proposta por Fourier em 1822. Para o caso simples da transmissão de calor em regime permanente através de uma parede plana, conforme mostrado na Figura 4, o gradiente de temperatura e o calor transmitido por unidade de tempo não variam com o tempo e a área da seção transversal no caminho do fluxo é uniforme.

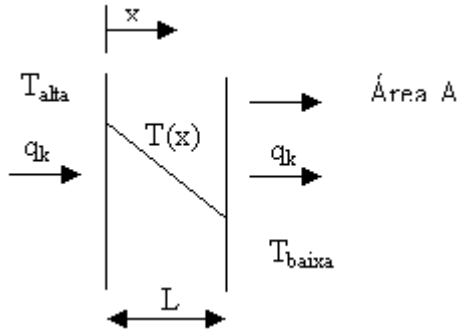


Figura 4 - Calor transmitido no caso de condução térmica.

A taxa de fluxo de calor nesse caso é definida como:

$$q_k = \frac{A \cdot k}{L} (T_{\text{alta}} - T_{\text{baixa}}) = \frac{A \cdot k}{L} (\Delta T) = \frac{\Delta T}{\frac{L}{A \cdot k}} \quad \text{eq. 30}$$

onde:

q_k = calor transmitido por condução por unidade de tempo (Kcal/h ou J/s = W);

k = condutividade térmica do material [kcal/(h . m . °C) ou W/(m . K)];

A = área da seção através da qual o calor flui, medido perpendicularmente à direção do fluxo (m^2); e

L = comprimento da parede.

O calor transmitido por unidade de tempo por convecção entre uma superfície e um fluido, conforme é ilustrado na Figura 5, pode ser calculado pela seguinte relação, proposta originalmente em 1701 por Newton:

$$q_c = \bar{h}_c \cdot A \cdot \Delta T \quad \text{eq. 31}$$

Onde:

q_c = calor transmitido por unidade de tempo por convecção (kcal/h ou W);

\bar{h}_c = coeficiente médio de transmissão de calor por meio de convecção [kcal/(h . m . °C) ou W/(m² . K)];

A = área de transmissão de calor (m²); e

ΔT = diferença entre a temperatura da superfície T_s e a do fluido T_f (°C ou K).

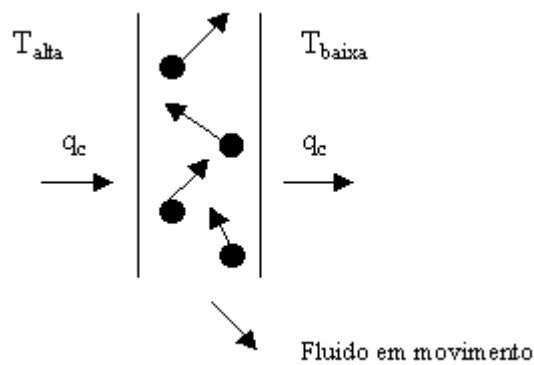


Figura 5 – Calor transmitido por convecção térmica.

Através da eq. 30 e da eq. 31, podemos dizer que o calor, tanto por condução ou convecção, transmitido por unidade de tempo é:

$$q = K \cdot \Delta T \quad \text{eq. 32}$$

onde:

K = coeficiente (Kcal/s . °C) e é dado por:

$$K = \frac{A \cdot k}{L} \text{ por condução e } K = \bar{h}_c \cdot A \text{ por convecção.}$$

- ***Resistência Térmica***

A resistência térmica R para a transferência de calor entre duas substâncias pode ser definida como se segue:

$$R = \frac{\text{variação na diferença de temperatura, } ^\circ\text{C}}{\text{variação na taxa do fluxo de calor, kcal/s}} \quad \text{eq. 33}$$

A resistência térmica para a transferência de calor por condução ou convecção é dada por:

$$R = \frac{d(\Delta T)}{dq} = \frac{1}{K} \quad \text{eq. 34}$$

Como os coeficientes de condutividade térmica e convecção são quase constantes, a resistência térmica tanto para condução como para convecção é constante [11].

3 Materiais e Métodos

3.1 Secador utilizado

O secador utilizado para secagem de plantas medicinais e aromáticas localizado na Área de Armazenamento da Universidade Federal de Viçosa, onde foram extraídos os dados para a modelagem matemática tem seu esquema mostrado na Figura 6.

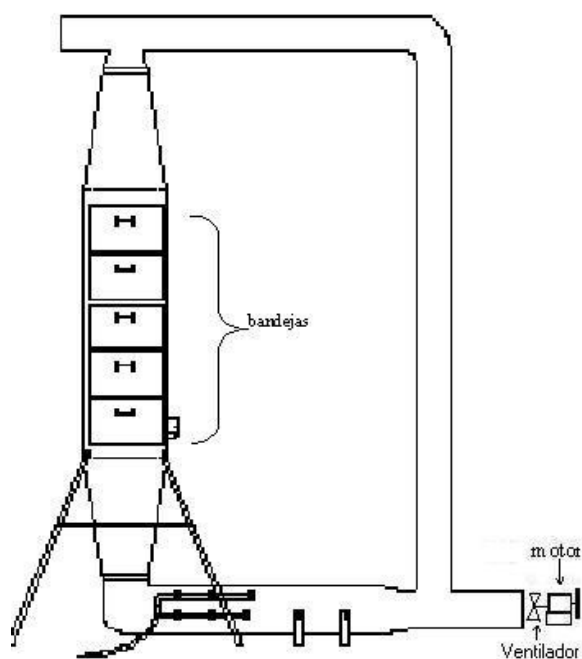


Figura 6 - Vista frontal do secador.

Esse secador a gás possui cinco bandejas onde são colocados os produtos para a secagem. Para a melhor visualização do secador fez-se um corte frontal no mesmo, conforme a Figura 7, com a intenção também de se detalhar todos os equipamentos que o constituem.

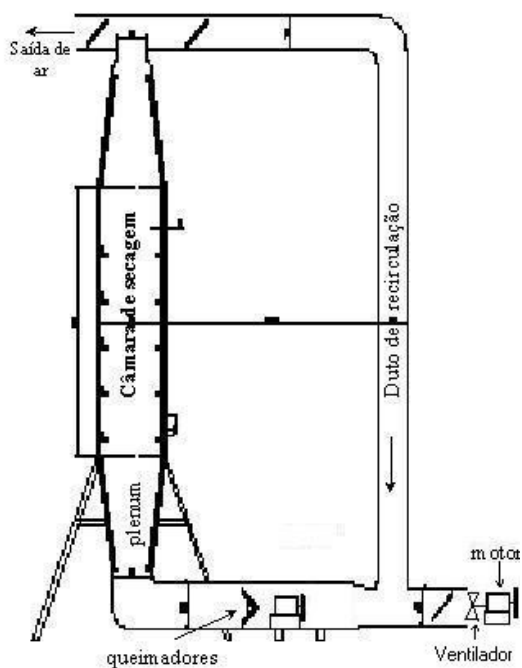


Figura 7 - Corte frontal do secador.

O secador construído é composto por duto para entrada de ar, ventilador, motor elétrico de 1/3 cv, sistema de aquecimento (queimadores), *plenum* inferior e superior, câmara de secagem e duto para recirculação de ar.

A câmara de secagem, o *plenum* e o duto de recirculação foram construídos com chapa metálica galvanizada número 18. Objetivando minimizar o consumo energético, foram colocadas chapas metálicas de forma dupla para possibilitar a fixação do isolamento térmico, sendo o espaço entre elas preenchido com uma camada de 25 mm de lã de rocha.

O ar de secagem era insuflado por um ventilador acoplado a um motor elétrico de 245 W (1/3 cv), situado no duto da entrada de ar (Figura 7). Foi construído um *plenum* inferior na forma de “V”, visando melhorar a distribuição do fluxo do ar de secagem através da massa de planta, e um *plenum* superior, mas em formato de “V” invertido. A câmara de secagem foi composta por cinco bandejas quadrangulares, com tampas teladas, construídas de aço inoxidável, com as dimensões 0,25 m de lado e 0,15 m de altura, perfazendo um volume total na câmara de aproximadamente 0,0469 m³. O duto de recirculação foi construído para possibilitar o reaproveitamento do ar após a secagem.

Como combustível para aquecimento foi utilizado gás liquefeito de petróleo (GLP). Para a construção do sistema foi necessária a utilização de duas linhas de queimadores e tubulação de gás [12][13].

3.2 Obtenção dos Modelos Matemáticos

As equações do sistema térmico, provenientes da termodinâmica, foram extraídas do sistema mostrado na Figura 8. Elas foram utilizadas primeiramente para a obtenção da FT e depois foi encontrado o modelo em Espaço de Estados e o modelo ARX através de tais equações.

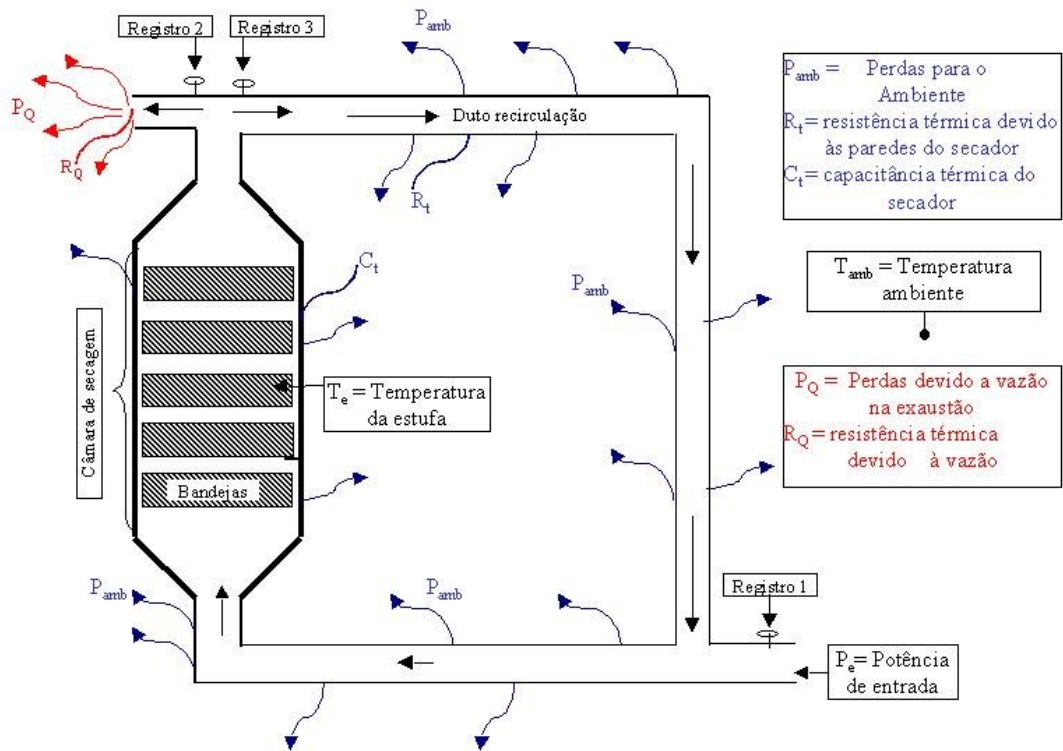


Figura 8 – Diagrama esquemático do secador.

3.2.1 Função de Transferência

Através da Figura 8, podemos extrair as seguintes equações do sistema:

$$P_{amb} = \frac{T_e - T_{amb}}{R_t} \quad \text{eq. 35}$$

$$P_Q = \frac{T_e - T_{amb}}{R_Q} \quad \text{eq. 36}$$

$$E = P_e - P_{amb} - P_Q = C_t \dot{T}_e \quad \text{eq. 37}$$

Onde:

P_e = Potência de entrada do sistema;

P_{amb} e P_Q são as perdas de potência para o ambiente e as perdas devido à vazão do gás, respectivamente;

T_{amb} e T_e são a temperatura ambiente e da estufa, respectivamente;

R_t e R_Q são as resistências térmicas devido às paredes do secador e devido à vazão, respectivamente;

C_t = capacitância térmica do sistema; e,

E = Potência armazenada dentro do secador.

Da eq. 37, temos a seguinte relação:

$$P_{amb} + P_Q = P_e - C_t \dot{T}_e \quad \text{eq. 38}$$

Substituindo a eq. 35 e a eq. 36 na eq. 38, tem-se:

$$\frac{T_e - T_{amb}}{R_t} + \frac{T_e - T_{amb}}{R_Q} = P_e - C_t \dot{T}_e \quad \text{eq. 39}$$

Rearranjando a eq. 39, tem-se:

$$P_e = C_t \dot{T}_e + \left(\frac{R_t + R_Q}{R_t R_Q} \right) T_e - \left(\frac{R_t + R_Q}{R_t R_Q} \right) T_{amb} \quad \text{eq. 40}$$

Aplicando a Transformada de Laplace na eq. 40, chegou-se a seguinte equação:

$$P_e(s) = s C_t T_e(s) + \left(\frac{R_t + R_Q}{R_t R_Q} \right) T_e(s) - \left(\frac{R_t + R_Q}{R_t R_Q} \right) T_{amb}(s) \quad \text{eq. 41}$$

Assim, as saídas do sistema são $T_e(s)$ e $T_{amb}(s)$, e a entrada é $P_e(s)$. Porém, considerando $T_{amb}(s)$ como um distúrbio no sistema, ou seja, fazendo $T_{amb}(s)=0$ e manipulando a eq. 41, chegou-se à seguinte FT:

$$\frac{T_e(s)}{P_e(s)} = \frac{R_t R_Q}{R_t R_Q C_t s + (R_t + R_Q)} \quad \text{eq. 42}$$

3.2.2 Espaço de Estados

Através da eq. 40 chega-se a seguinte equação:

$$\dot{T}_e + \left(\frac{R_t + R_Q}{R_t R_Q C_t} \right) T_e = \frac{1}{C_t} P_e \quad \text{eq. 43}$$

Definindo a variável de estado como $x(t)$:

$$x(t) = T_e \quad \text{eq. 44}$$

Então, obteve-se a seguinte equação:

$$\dot{x} = \dot{T}_e = -\left(\frac{R_t + R_Q}{R_t R_Q C_t}\right)x + \frac{1}{C_t}P_e \quad \text{eq. 45}$$

Portanto, a equação de estado, na forma matricial é:

$$[x] = \left[-\left(\frac{R_t + R_Q}{R_t R_Q C_t}\right)\right][x] + \left[\frac{1}{C_t}\right]P_e \quad \text{eq. 46}$$

E a equação de saída é:

$$[T_e] = [1][x] \quad \text{eq. 47}$$

3.2.3 Modelo ARX

Para a obtenção do modelo ARX, utilizou-se a FT da eq. 42 e realizou-se o mapeamento $s \leftrightarrow z$ através da Transformação Bilinear. E, lembrando-se que $y(z)z^{-1} = y(k-1)$, chegou-se a seguinte equação após algumas manipulações algébricas:

$$T_e(k) = \left(\frac{\frac{2R_t R_Q C_t}{T} - (R_t + R_Q)}{\frac{2R_t R_Q C_t}{T} + (R_t + R_Q)}\right) T_e(k-1) + \left(\frac{R_t R_Q}{\frac{2R_t R_Q C_t}{T} + (R_t + R_Q)}\right) P_e(k) + \left(\frac{R_t R_Q}{\frac{2R_t R_Q C_t}{T} + (R_t + R_Q)}\right) P_e(k-1) \quad \text{eq. 48}$$

Onde T é o período de amostragem.

3.3 Ensaios de secagem

Os ensaios de secagem foram conduzidos no Laboratório de Secagem, Área de Armazenamento, situado no Departamento de Engenharia Agrícola, na Universidade Federal de Viçosa.

Foram utilizados 6 termopares (Cobre-Constantan) para obter os dados de temperatura. Destes, cinco foram distribuídos no secador e o outro foi utilizado para medir a temperatura ambiente. A Figura 9 mostra a localização desses termopares, denominados T_i ($i = 1, 2, \dots, 6$).

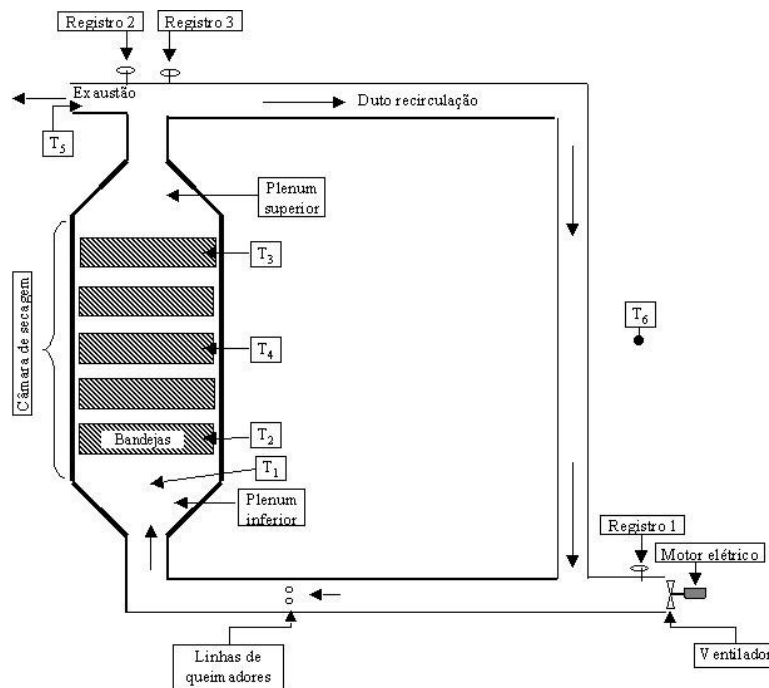


Figura 9 – Localização dos termopares no secador.

Através da porta paralela do computador, foi conectada a placa OMD 5508TC, da OMEGA Technologies Company, a qual estava conectada aos termopares, e através do software Direct View for Windows (DVW) foram levantados os valores de temperatura num determinado tempo. O intervalo de amostragem para os valores da temperatura foi de um segundo.

Foram feitos dois ensaios: um com o registro 3 aberto e o outro com ele fechado. Os registros 1 e 2 ficaram sempre abertos durante as medições (Figura 9). Em todos os ensaios os termopares ficaram monitorando até que as temperaturas se estabilizassem (cerca de 3600 segundos ou uma hora), e logo após as linhas de queimadores foram desligadas. Esperou-se novamente pela estabilização das temperaturas. A Figura 10 mostra uma curva obtida com o termopar 4 e o registro 3 fechado.

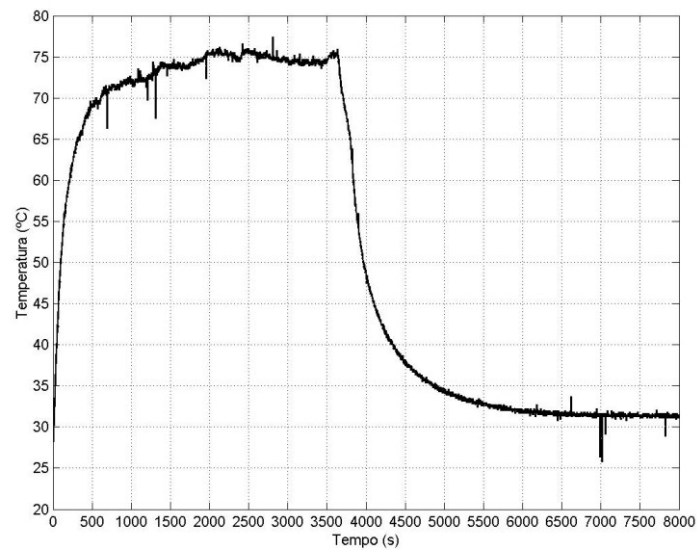


Figura 10 - Temperaturas obtidas com o termopar 4.

4 Resultados e Discussões

4.1 Estimação dos Parâmetros

Depois da aquisição dos valores de temperatura no ensaio de secagem, estimou-se alguns parâmetros do sistema os quais serão aplicados na modelagem do processo.

A estimação da capacitância térmica, da potência de entrada do secador e da resistência térmica devido às paredes do secador foram obtidas através de equações conhecidas da termodinâmica, enquanto que a estimação da resistência térmica devido à vazão foi obtida através da simulação do modelo ARX através do software Matlab®.

4.1.1 Capacitância térmica da estufa

Para a estimação da capacitância térmica (C_t) foram medidas todas as dimensões do secador para calcular o volume total de ar dentro do mesmo. O volume calculado foi 0.65109 m^3 . Assim, foi estimada a capacitância térmica:

$$C_t = m_{ar} \cdot c_{ar} = V_{ar} \cdot d_{ar} \cdot c_{ar} = 0.65109 \text{ m}^3 \cdot 1.22 \text{ Kg/m}^3 \cdot 1010 \text{ J/(Kg} \cdot ^\circ \text{C)}$$
$$C_t = 802.27 \text{ J/}^\circ \text{C} \quad \text{eq. 49}$$

Onde:

m_{ar} e V_{ar} = massa e volume de ar dentro do secador, respectivamente; e

c_{ar} e d_{ar} = densidade e calor específico do ar, respectivamente;

4.1.2 Potência fornecida ao secador

Para a estimação da potência fornecida ao secador (P_e), calculou-se duas energias, as quais em seguida foram somadas. Uma devido à energia dissipada dentro

do secador (P_{e1}) e a outra devido à vazão no sistema (P_{e2}). Essas energias foram calculadas em Joule e depois divididas pelo intervalo de tempo escolhido para acharmos a potência entregue pelo sistema em watt.

Utilizando um trecho da curva de temperatura, o qual mais se aproximou de uma reta, pode-se estimar que $P_{e1} = C_t \dot{T}_e \approx C_t \Delta T_e$. Assim, seja a curva da Figura 11, extraída do termopar 5, quando o registro 3 estava fechado. O termopar 5 foi escolhido por estar medindo as temperaturas no exaustor e assim nos dá com maior precisão as perdas de potências.

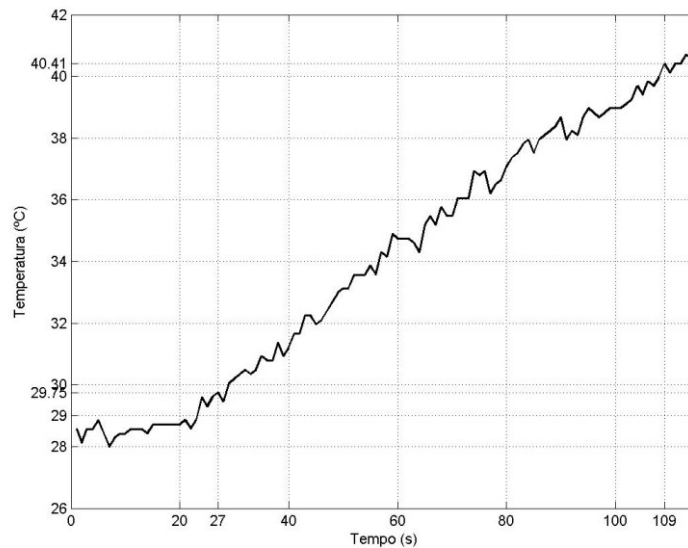


Figura 11 – Trecho da curva de temperatura medida com o termopar 5.

Na Figura 11 estão marcadas as coordenadas utilizadas no cálculo de P_{e1} , que são: (27;29.75) e (109;40.41). Assim, foi calculado o valor de P_{e1} :

$$P_{e1} = C_t \Delta T_e = 802.27(40.41 - 29.75) = 8552.20J \quad \text{eq. 50}$$

Para calcular P_{e2} , mediu-se o valor da vazão do sistema. Para isso, foi medido o valor da velocidade do ar (v_{ar}) na região onde ficam as bandejas, obtendo $v_{ar} = 0.5 \text{ m/s}$ [13]. Como a área da seção transversal (A) nessa região é de 0.1156 m^2 , podemos encontrar o valor da vazão Q do sistema e conseqüentemente o valor de P_{e2} :

$$Q = Av_{ar} = 0.1156 \cdot 0.5 = 0.0578 m^3/s \quad \text{eq. 51}$$

$$P_{e2} = QA_{\Delta T} d_{ar} c_{ar} = 0.0578 \cdot \left(\frac{(109 - 27)(40.41 - 29.75)}{2} \right) \cdot 1.22 \cdot 1010 = 31127.92 J \quad \text{eq. 52}$$

onde $A_{\Delta T}$ é aproximadamente a área abaixo da curva da temperatura no intervalo escolhido.

Logo:

$$P'_e = P_{e1} + P_{e2} = 39680.11 J \quad \text{eq. 53}$$

E, portanto:

$$P_e = \frac{P'_e}{\Delta T} = \frac{39680.11}{82} \approx 485 W \quad \text{eq. 54}$$

Percebe-se que ocorre um grande desperdício de energia no secador pois a maior parte da energia é perdida através do exaustor. Mais precisamente há um desperdício de $(P_{e2}/P'_e) \cdot 100\% = 78.45\%$.

4.1.3 Resistência térmica da estufa devido à parede do secador

Para a estimação da resistência térmica (R_t), utilizou-se a curva de temperatura do termopar 5, quando as linhas de queimadores foram desligadas, conforme Figura 12. Para esse caso poderia ter sido escolhido qualquer termopar.

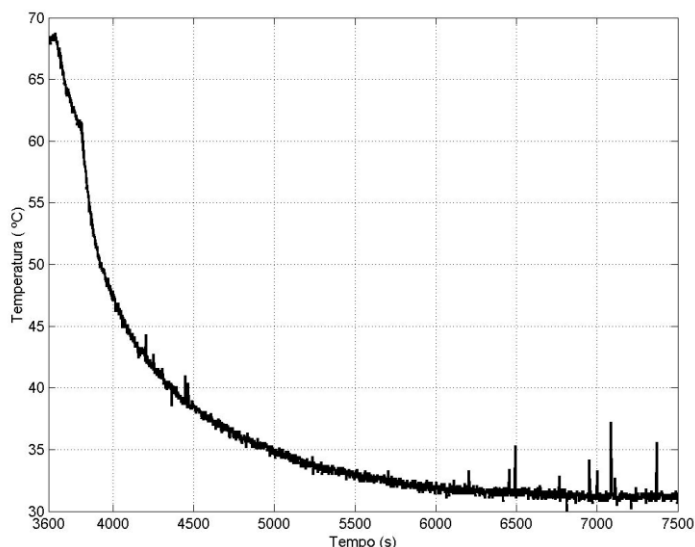


Figura 12 – Temperatura no termopar 5 com o sistema desligado.

Dessa curva, estimou-se a constante de tempo τ necessária para que o sistema atingisse 63.2 % do seu valor final. De acordo com a Figura 12 pode-se ver que aproximadamente aos 7000 segundos o valor da temperatura se estabilizou. Por isso: $\tau = (7000 - 3600) \cdot 0.632 = 2148.8s$. Com isso, pode-se encontrar o valor de R_t :

$$R_t = \frac{\tau}{C_t} = \frac{2148.8}{802.27} = 0.37s^{\circ}C/J \quad \text{eq. 55}$$

4.1.4 Resistência térmica da estufa devido à vazão de ar na exaustão

Para a estimação da resistência térmica devido à vazão na exaustão (R_Q) foi utilizado o software Matlab®, do qual através dos dados de temperatura medidos (saída) e da energia fornecida ao secador (entrada degrau) obtida na eq. 54, obteve-se a equação a diferenças relativa ao modelo ARX. A simulação nesse software nos deu a seguinte resposta:

Tabela 1 - Simulação no Matlab ® utilizando ARX

Discrete-time IDPOLY model: $A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)$ $A(q) = 1 - 0.994 q^{-1}$ $B(q) = -0.0003156 + 0.0008562 q^{-1}$

A curva de temperatura estimada pelo modelo ARX também foi obtida e pode ser comparada com os dados de temperaturas medidos pelo termopar 4 na Figura 13. Esse termopar foi escolhido pelo fato de estar numa posição central da câmara de secagem. Pode-se observar que o modelo ARX acompanhou a variação dos dados reais.

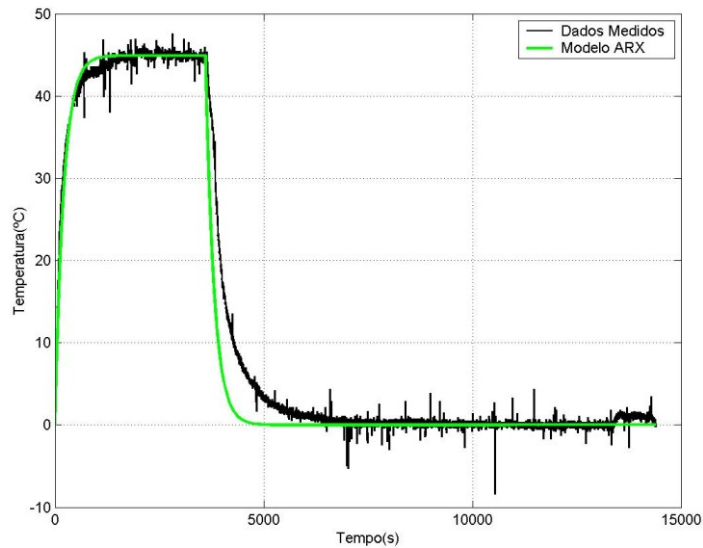


Figura 13 – Comparação dos dados medidos com o Modelo ARX estimado.

Através dessa resposta (Tabela 1), foram substituídos os valores dos polinômios $A(q)$ e $B(q)$ na equação a diferenças do modelo ARX e obteve-se:

$$(1 - 0.994 q^{-1})y(t) = (-0.0003156 + 0.0008562 q^{-1})u(t) + e(t)$$

Ou: $y(t) - 0.994 q^{-1}y(t) = -0.0003156u(t) + 0.0008562 q^{-1}u(t) + e(t)$

Fazendo-se $t=k$ e lembrando-se que $q^{-1}y(k) = y(k-1)$ e $q^{-1}u(k) = u(k-1)$, tem-se:

$$y(k) = 0.994y(k-1) - 0.0003156u(k) + 0.0008562u(k-1) + e(k) \quad \text{eq. 56}$$

Onde $u = P_e$ (entrada do sistema) e $y = T_e$ (saída do sistema). Assim, pode-se reescrever a eq. 56 da seguinte maneira:

$$T_e(k) = 0.994T_e(k-1) - 0.0003156P_e(k) + 0.0008562P_e(k-1) + e(k) \quad \text{eq. 57}$$

Igualando a eq. 57 a eq. 44, pode-se notar que o único parâmetro a ser encontrado é R_Q , pois os outros parâmetros já foram encontrados anteriormente. É importante também dizer que o tempo de amostragem escolhido foi de uma amostragem por segundo ($T=1$). Com isso encontrou-se três possíveis valores de R_Q :

$$R_{Q1} = 0.4723 ; R_{Q2} = -2.1374e-004 \text{ e } R_{Q3} = 0.0023.$$

Finalmente R_Q é estimada com a média aritmética dos valores de R_{Q1} , R_{Q2} e R_{Q3} :

$$R_Q = 0.1566 \text{ (s}^\circ\text{C)/J} \quad \text{eq. 58}$$

Com isso, estimou-se todos os parâmetros do sistema, resumidos abaixo:

$$C_t = 802.27 \text{ J/}^\circ\text{C}; \quad R_t = 0.37 \text{ (}^\circ\text{C s)/J}; \quad R_Q = 0.1566 \text{ (}^\circ\text{C s)/J}; \quad \text{e } P_e = 485 \text{ W.}$$

4.2 Sintonia do Modelo

A fim de verificar o desempenho do modelo do processo de secagem é necessário simulá-lo em uma condição de operação da qual se tenham medições com as quais se possa comparar a saída do modelo.

Utilizando-se do Termopar 4 (Figura 9), pelo mesmo motivo já exposto, obteve-se os valores medidos e através da FT (eq. 42), já com os parâmetros substituídos, calculou-se a resposta do modelo encontrado. Esse resultado é mostrado na Figura 14. É importante observar que dos valores medidos foram subtraídos os valores de temperatura ambiente local, ou seja, o zero grau equivale à temperatura ambiente que durante as medições foi monitorada em 27 °C. Essa consideração de que temperatura ambiente fosse a referência é utilizado em todo o trabalho.

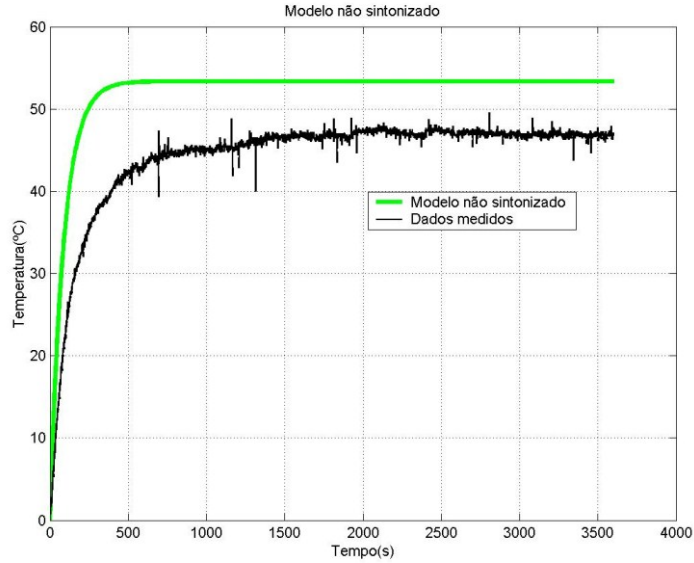


Figura 14 – Sinal de temperatura medido e simulado com o modelo não sintonizado.

Observa-se através da Figura 14 que a resposta do modelo tem a mesma forma da resposta do processo, porém necessita de ajustes. Isso indica que a ordem do modelo é uma boa aproximação à ordem da planta.

De forma geral, percebe-se que a ordem do modelo é mais rápida do que a do processo e, também, o ganho do mesmo é maior que o ganho do processo. Portanto, para sintonizar o modelo será desejável aumentar sua constante de tempo e diminuir-se o ganho.

Assim, de acordo com a eq. 42 da FT, temos que a constante de tempo τ e o ganho K do processo são:

$$\tau = \frac{R_t R_Q C_t}{R_t + R_Q} \quad e \quad K = \frac{R_t R_Q}{R_t + R_Q} \quad \text{eq. 59}$$

Com isso, observamos da eq. 59 que para aumentar a constante de tempo tem-se que aumentar a capacitância térmica C_t e as resistências térmicas R_t e R_Q . Para diminuir o ganho é necessário diminuir os valores de R_t e R_Q . Após realizar algumas simulações, e variando-se os parâmetros em torno de 20% do seu valor (exceto a capacitância térmica que foi aumentada em mais de 100%) chegou-se ao seguinte ajuste:

$$C_t = 2300 \text{ J/}^\circ\text{C}; \quad R_t = 0.31 \text{ (}^\circ\text{C s)/J}; \quad R_Q = 0.14 \text{ (}^\circ\text{C s)/J}; \quad \text{e } P_e = 485 \text{ W.}$$

Com esses novos valores chegou-se ao modelo sintonizado da Figura 15 e às equações dos modelos da FT, Espaço de Estados e ARX:

- Função de Transferência: $\frac{T_e(s)}{P_e(s)} = \frac{0.0434}{99.82s + 0.45} = \frac{0.0964}{221.82s + 1}$

- Espaço de Estados:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= [-0.0045][x] + [0.00043][P_e] \\ T_e &= [1][x] \end{aligned}$$

- ARX:

$$T_e(k) = 0.9955T_e(k-1) + (2.169 \cdot 10^{-4})P_e(k) + (2.169 \cdot 10^{-4})P_e(k-1)$$

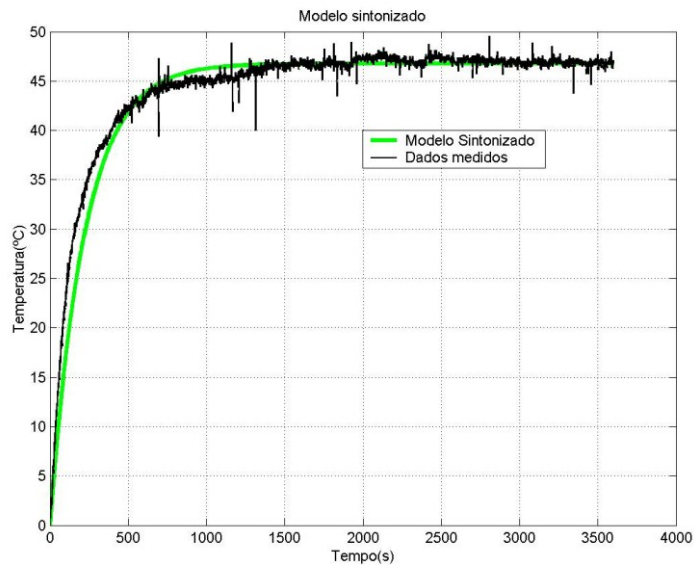


Figura 15 – Sinal de temperatura medido e simulado com o modelo sintonizado.

4.3 Validação do Modelo

Para validar o modelo é necessário simular o mesmo *sem qualquer ajuste adicional* e compará-lo a dados medidos coletados em *testes diferentes* daqueles usados

no desenvolvimento e sintonia do modelo. Para isso, foram feitas novas medidas de temperatura e selecionado o termopar 4 novamente (Figura 9) para a validação. A Figura 16 a seguir mostra a validação dos modelos, bem como a comparação dos mesmos ao dados reais de temperatura.

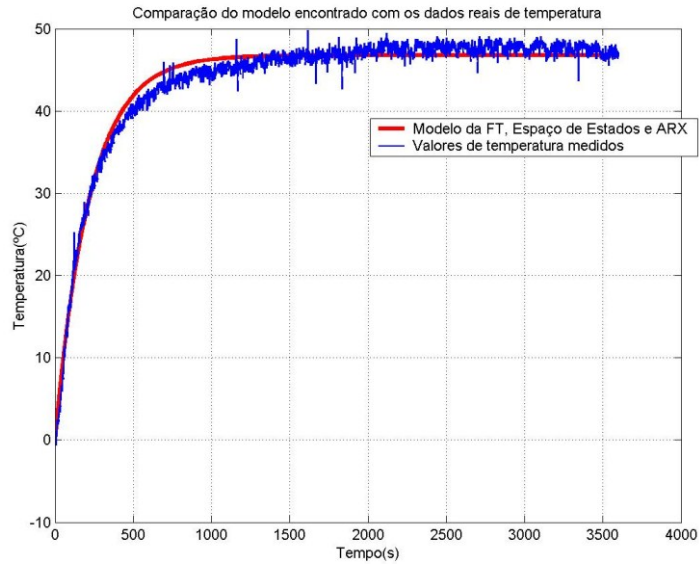


Figura 16 - Comparação dos modelos da FT, Espaço de Estados e ARX com os dados reais.

4.3.1 Comparação dos modelos matemáticos com os dados reais

Tabela 2 – Comparação dos modelos matemáticos com os dados reais

	<i>Modelos matemáticos</i>	<i>Dados reais</i>
<i>Temperatura máxima (°C)</i>	46.7756	49.7977
<i>Constante de tempo τ (s)</i>	221	236
<i>Tempo de subida t_r (s)</i>	510	900
<i>Tempo de acomodação t_s (s)</i>	870	1500

O erro relativo da temperatura máxima do modelo matemático em relação aos dados reais pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\text{erro}(\%) = \frac{(46.7756 - 49.7977)}{49.7977} \cdot 100\% = -6.07\%$$

Calculou-se também o erro médio quadrático (MSE – do inglês *Mean Square Error*), que é definido como:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{m(i) - c(i)}{c(i)} \right)^2} \quad \text{eq. 60}$$

Onde:

n = número de dados medidos;

m = dados medidos; e

c = valores simulados pelo modelo matemático.

Assim, utilizando-se a eq. 60, obteve-se o erro médio quadrático (MSE):

$$\text{MSE} = 0.0045 = 0.45\%.$$

Os valores calculados para os dados reais de constante de tempo, tempo de subida e tempo de acomodação são valores aproximados, devido à presença de ruídos.

5 Conclusões

Observa-se que o comportamento dos modelos matemáticos variou em conformidade com o processo real independentemente da técnica de modelagem escolhida.

Em relação à comparação dos modelos matemáticos com os dados reais observa-se que houve uma ótima aproximação. Nota-se também que a sintonia do modelo é fundamental para melhorar o modelo, mas sem a estimativa inicial não seria possível conseguir-se o modelo o qual represente o processo real.

Outro fato observado é que os dados medidos possuem muitos ruídos e por isso ocorrem oscilações bruscas na temperatura prejudicando a comparação com os modelos matemáticos, por exemplo, na comparação da temperatura máxima atingida.

Em relação ao ARX pode-se ver que é um método eficaz para se conseguir estimar parâmetros através das equações a diferenças. Pode-se perceber também que o modelo ARX utilizado para estimar a resistência térmica devido à vazão pelo exaustor apresentou um ótimo comportamento durante os primeiros 3600 segundos (linhas de queimadores ligados), no entanto variou quando o sistema foi desligado e a temperatura começou a diminuir.

Devemos observar também que não foi considerada a lã de rocha que existe entre as paredes do secador que possibilitam a fixação do isolamento térmico. Se isso tivesse sido feito o modelo seria um sistema de 2ª ordem melhorando significativamente a resposta do modelo. Além disso, pelo fato de não se considerar o efeito da capacitância térmica devido à lã de rocha, aumentou-se a capacitância térmica do sistema em mais de 100% do valor estimado e assim, a capacitância utilizada pode ser considerada a soma das capacitâncias devido ao ar e a lã de rocha.

Para trabalhos futuros, com os conhecimentos aqui adquiridos, podem-se implementar ações de controle para a simulação da temperatura do ar de secagem no interior do secador, bem como desenvolver um supervisor para o sistema.

6 Referências Bibliográficas

- [01] VENSKUTONIS, P.R. *Effect of drying on the volatile constituents of thyme(Thymus vulgaris L.) and sage(Salvia officinalis L.).Food Chemistry*, v. 59, n.2,p.219-227,1997..... 10
- [02] BARITAUX, O.; RICHARD, H.; TOUCHE, J.; DERBESY, M. Effects of drying and storage of herbs and spices on the essential oil. Part I. Basil, *Ocimum basilicum L. Flavour and Fragrance Journal*, v.7, p. 267-271, 1992. de..... 10
- [03] MARTINS, P. M. Influência da temperatura e da velocidade do ar de secagem no teor e na composição química do óleo essencial de capim-limão (*Cymbopogon citratus* (D. C.) Stapf). 2000. 77f.. Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola) – Universidade Federal de Viçosa. Viçosa – MG. 10
- [04] MELO, E. C.; RADÜNZ, L. L.; MELO, R. C. A. Influência do processo de secagem na qualidade de plantas medicinais – Revisão. *Engenharia na Agricultura*, v.12, n.4, p. 307-315, 2004..... 10
- [05] AGUIRRE, LUÍS ANTÔNIO. Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais. 2ª ed. rev. E ampl. – Belo Horizonte: Editora UFMG, 2004..... 12, 14, 16, 18, 19, 25
- [06] OGATA, KATSUHIKO. Engenharia de controle moderno; tradução Paulo Álvaro Maya; revisão técnica Fabrizio Leonardi ... [et al.]. – 4. ed. – São Paulo: Prentice Hall, 2003. 12, 15, 17, 18, 23
- [07] DORF, RICHARD C; BISHOP, ROBERT H. Sistemas de Controle Modernos; tradução Bernardo Severo da Silva Filho... [et al.]. – 8. ed. – Rio de Janeiro: LTC Editora, 2001. 17
- [08] RUGH, W. J. *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996..... 18
- [09] Página na internet acessada no dia 28 de março de 2006:
www.labspot.ufsc.br/~aguinald/ensino/eel7063/servo12.pdf0 25
- [10] CARVALHO, J.L. MARTINS DE. *Sistemas de Controle Automático*; Rio de Janeiro: Editora JC, 2000. 27
- [11] GARCIA, CLÁUDIO. *Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânico*; São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1997. – (Acadêmica; 11). 33
- [12] JESUZ, J.C.; RADÜNZ, L. L.; MELO, E. C.; SOUZA, J. A. R.; ROCHA, R. P.; BERBERT, P. A. Sistema de Controle Automático da Temperatura do ar de Secagem em Secador de Plantas Medicinais. *Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais*, Campina Grande, v. 3, n. 1, p. 43-46, 2001..... 36
- [13] RADÜNZ, L. L. Efeito da temperatura do ar de secagem no teor e na composição dos óleos essenciais de guaco (*Mikania glomerata Sprengel*) e hortelã-comum (*Mentha x villosa Huds*), Viçosa: UFV, 2004. 36, 43