

# Modelagem Matemática do Sistemas de Temperatura da Planta Didática de Automação Industrial SMAR-PD3

Felipe E. M. Cota, André G. Torres, Lucas F. Rodrigues, Denilson E. Rodrigues, Kétia S. Moreira

Laboratório de Controle e Automação

Departamento de Engenharia Elétrica

Universidade Federal de Viçosa

36570-000 – Viçosa – MG - Brasil

E-mail: felipe.cota@ufv.br , angoto@ufv.br, lucas.rodrigues@ufv.br, deduardo@ufv.br, ketia@ufv.br

*Abstract-* This work aims to make the termic modeling of the SMAR'S PD3 didatic plant, that operates with Foundation Fieldbus communication. We can simulate several industrial processes through this plant because the equipments and tools of physical structure of this didactic plant are the same equipments and tools used in the factory floor of the industries. For the system identification it is necessary estimate the equation difference to have the mathematical model that better describes the thermal behavior of the hot water tank. The data collection will be done using Process View to make the modeling and the systems identification. Using these data, we create a planning routine to make the reading and processing.

*Resumo* - O presente trabalho tem como objetivo a modelagem térmica da planta didática PD3 da SMAR'S que opera segundo o protocolo de comunicação Foundation Fieldbus. A planta didática permite simular diversos processos industriais, pois os equipamentos e ferramentas que a constitui são os mesmos utilizados no chão de fábrica das indústrias. Para a identificação do sistema, será necessário estimar a equação de diferenças a fim de obter o melhor modelo matemático que descreve o comportamento térmico do tanque de água quente. Os dados utilizados na modelagem do sistema foram coletados através do software ProcessView fornecido no pacote SMAR. De posse desses dados, criou-se rotinas de programação para realizar a leitura e o seu processamento.

# I. INTRODUÇÃO

Modelagem Matemática e Identificação de Sistemas são métodos de aplicações muito comuns e extremamente importantes para a ciência e a indústria atuais no que diz respeito ao entendimento de processos contínuos.

Modelagem Matemática é o processo de obtenção de equações ou gráficos que possam representar, da forma mais fiel possível, as características ou comportamentos de um sistema real. A importância de se modelar sistemas reais é evidenciado no âmbito de que os resultados obtidos podem ser usados para proporcionar um melhor conhecimento sobre tal sistema. Em um ambiente industrial, a utilidade dos modelos na implementação de equipamentos ou máquinas está associada à realização de atividades de forma automática, baseada em tais equações matemáticas. Esta área do conhecimento não se limita somente a aplicações industriais, sendo também utilizada em outras áreas, como por exemplo no estudo do meio ambiente, na medicina, etc.

Identificação de sistemas é um procedimento alternativo que se propõe a obter um modelo matemático que explique, pelo menos em parte e de forma aproximada, a relação de causa e efeito presente em um banco de dados sem a necessidade de conhecimento prévio da física do processo.

Suponha que o banco de dados disponível represente a entrada,  $u(k)$ , e saída,  $y(k)$ , de um sistema real qualquer. Em um processo de modelagem e identificação de sistemas é necessário seguir algumas etapas tais como efetuar os testes dinâmicos e coletar os dados, escolher uma representação matemática a ser utilizada, determinar a estrutura do modelo, estimar os parâmetros e, por fim, validar o modelo obtido.

O processo de Modelagem Matemática pode ser desenvolvido em uma Planta Didática SMAR - PD3 cujo objetivo é demonstrar didaticamente a operação das diversas malhas de controle utilizando os mesmos equipamentos e ferramentas de configuração (em software) aplicados no âmbito industrial. Em um arranjo compacto, a PD3 torna acessível aos instrutores e aprendizes todos os componentes desta malha, não sendo apenas uma estrutura para ser observada, mas também para ser manipulada. Na implementação destas malhas estão contidas as mesmas características e situações encontradas pelos profissionais de instrumentação com os recursos da alta tecnologia disponível no mercado [1].

Neste trabalho será apresentado a modelagem matemática do sistema de variação térmica do tanque de uma Planta Didática SMAR - PD3 seguindo as etapas supracitadas. Inicialmente, determina-se a capacitância térmica e a resistência térmica do modelo matemático já obtido que são utilizados para obter a equação de diferenças e, posteriormente, define-se o melhor modelo que descreve o sistema em questão.

## II. MODELOS MATEMÁTICOS

Um modelo matemático de um sistema real é um análogo matemático que representa algumas características observadas em tal sistema [2]. Esses modelos são utilizados para tentar explicar e entender fenômenos que ocorrem, por exemplo, na natureza, em sistemas sociais, biomédicos, sistemas de controle e monitoração, estimação, simulação e treinamento.

O problema de elaborar modelos matemáticos de sistemas dinâmicos baseado em observações destes sistemas pode ser entendido como o problema da área da engenharia de controle denominada identificação de sistemas [3]. O modelo de um sistema, por sua vez, pode ser entendido como uma descrição de algumas das propriedades do sistema, adequada a algum propósito específico [4]

Uma questão relevante é a escolha do tipo de modelo a ser utilizado porque, para uma escolha adequada, deve-se levar em consideração o objetivo em vista, a sua aplicação, o processo, as características do banco de dados bem como o tempo disponível para desenvolver o modelo.

As técnicas clássicas para a identificação de sistemas podem ser divididas em duas grandes classes: os métodos não paramétricos e os métodos paramétricos. O primeiro deles visa determinar funções de transferência ou respostas ao impulso através de técnicas diretas, sem selecionar anteriormente um conjunto de modelos possíveis e que não empregam um vetor de parâmetros de dimensão finita de forma direta. Destacam-se nesse âmbito a análise de transitórios e a análise de correlação[5].

Em contraste, os modelos denominados paramétricos, selecionam-se a priori um sistema com um vetor de parâmetros  $\theta$ . Por fim, dado um vetor de observações da entrada e saída do processo, objetiva-se obter os parâmetros do modelo que melhor descrevem o processo [5].

A fim de desenvolver um modelo aproximado durante a modelagem do sistema térmico apresentado neste trabalho foi utilizado a correlação cruzada, o modelo ARX utilizando o

método dos Mínimos quadrados (MMQ), o Estimador Recursivo de Mínimos quadrados com e sem fator de esquecimento.

Em uma coleta de dados, em qualquer experimento real, haverá a presença de ruídos. O método da correlação cruzada é um método estocástico que apresenta um certo grau de robustez ao ruído. Esse procedimento se refere a medida da relação entre uma entrada, quando aplicada a um processo ergódico, e uma saída do sistema. Sabe-se então que a parte determinística do sinal que contém a informação sobre a dinâmica do processo é preservado na saída porque os efeitos do ruído tendem a se cancelar uma vez que o ruído não apresenta uma tendência.

A estrutura de auto-regressão (ARX) leva em consideração as entradas do processo. Este modelo faz uso da auto-regressão e da variável exógena  $B.u(t)$ , motivo pelo qual é conhecido como ARX. Um modelo desta natureza é o mostrado a seguir.

$$\left\{ \begin{array}{l} A(q)x(k) = B(q)y(k) \quad (1) \\ A(q) = a_1 q^{-1} + \dots + a_{ny} q^{-ny} \quad (2) \\ B(q) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{nu} q^{-nu} \quad (3) \end{array} \right.$$

onde  $A(q)$  e  $B(q)$  são os polinômios que contém, respectivamente, os pólos e os zeros do sistema,  $q$  é operador de atraso;  $ny$  e  $nu$  são os maiores atrasos dos polinômios  $A(q)$  e  $B(q)$ .

O Método dos Mínimos Quadrados é uma técnica de otimização matemática que procura o melhor ajustamento do conjunto de dados tentando sempre minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre a curva ajustada e os dados.

Já o Estimador Recursivo de Mínimos Quadrados (RMMQ), por sua vez, é uma versão mais sofisticada do Método dos Mínimos Quadrados onde pode-se usar a seguinte relação:

$$\theta = [x^T x]^{-1} x^T y \quad (4)$$

onde  $x$  é a entrada,  $y$  é a saída e  $\theta$  é o vetor de parâmetros a serem identificados.

Se o sistema a ser identificado variar no tempo é necessário fornecer ao algoritmo de mínimos quadrados uma capacidade de ponderação diferenciada para as observações, fazendo com que as últimas medidas tenham uma maior importância. Isso porque elas contêm informações mais atualizadas e precisam ter maior influência na estimação dos parâmetros. O algoritmo dos RMMQ padrão minimiza o funcional e pondera cada erro de estimação igualmente. Para ponderar mais as informações mais recentes, toma-se como ponto de partida a equação 03,

$$x(k) = \varphi_k^T(k-1)\hat{\theta}_k \quad (5)$$

onde  $\varphi$  é o vetor de regressores e  $\theta$  é o vetor que contém os parâmetros a serem identificados. O algoritmo de Estimação Recursiva de Mínimos Quadrados com fator de esquecimento apresenta a seguinte forma [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_k = \frac{P_{k-1}\psi_k}{\psi_k^T P_{k-1} \psi_k + \lambda} \quad (6) \\ \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k [y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_{k-1}] \quad (7) \\ P_k = \frac{1}{\lambda} \left( P_{k-1} - \frac{\psi_k^T P_{k-1} \psi_k P_{k-1}}{\psi_k^T P_{k-1} \psi_k + \lambda} \right) \quad (8) \end{array} \right.$$

onde  $\lambda$  é chamado de fator de esquecimento,  $K$  é o ganho Kalman,  $\hat{\theta}_k$  é o vetor de parâmetros estimado na iteração  $k$ ,  $P_k$  é a matriz de covariância e  $\psi$  é o vetor de regressores. Se  $\lambda = 1$ , tem-se o RMMQ padrão. Na prática usa-se valores na faixa  $0,95 \leq \lambda \leq 0,99$ . Deste modo, as medidas antigas são exponencialmente “esquecidas” e uma maior ênfase é atribuída aos valores mais recentes.

### III. PLANTA DIDÁTICA SMAR - PD3

A Planta Didática Smar é monitorada e operada de uma estação, constituída de um microcomputador do tipo PC e um software de supervisão, que efetua a aquisição de dados dos equipamentos e o apresenta uma animações do processo corrente. Além disso, permite também atuar nos registros modificando valores internos dos equipamentos e nos modos operacionais das malhas de controle.

O Syscon - Configurador de Sistema é uma ferramenta de software desenvolvida especialmente para fazer a configuração, manutenção e operação da linha de produtos Fieldbus da Smar, através de um computador pessoal com uma interface Fieldbus. Com uma IHM (Interface Homem-Máquina) amigável, o SYSCON proporciona uma interação produtiva e eficiente com o usuário, sem a necessidade de conhecimento prévio do software[1].

Os instrumentos Fieldbus utilizados durante o processo de modelagem foi o seguinte:

- FI302 – Conversor de Corrente Fieldbus para 4 – 20 mA (comanda a corrente aplicada no conversor de potência)
- TT302 – Transmissor de Temperatura (mede a temperatura do tanque de mistura)
- LD302 – Transmissor de Vazão (mede as vazões de água quente e fria)

O sistema de supervisão ProcessView instalado no microcomputador do tipo PC é o software do pacote Smar que permite monitorar e atuar no sistema em funcionamento. Esse software disponibiliza ferramentas de criação de telas de sinótico, registros gráficos, tratamento de alarmes, relatórios, bancos de dados, transferência de informações para outros aplicativos, visualização em múltiplos monitores, dentre outras características.

## IV. MODELAGEM DO PROCESSO

Esta seção apresenta a modelagem matemática aplicada à planta piloto da fig. 1:

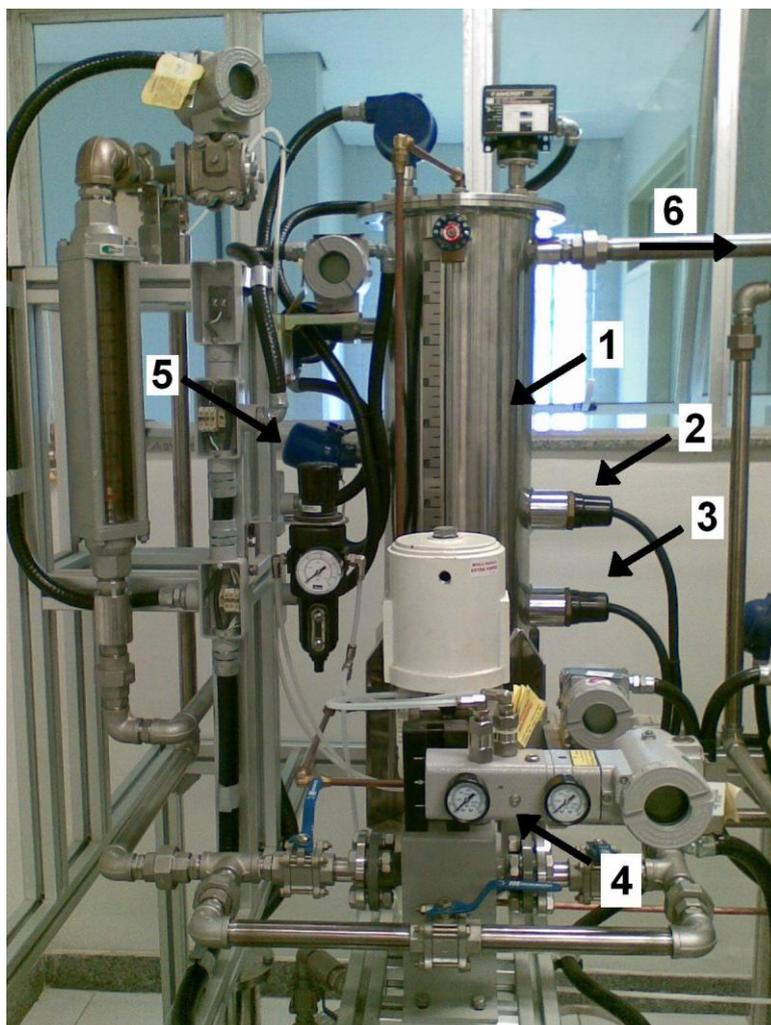


Fig. 1 Planta didática SMAR – PD3: (1) Tanque de água quente; (2) e (3) Resistências de 4KW; (4) Válvula pneumática de controle de vazão; (5) Termopar ;(6) Saída de água.

A modelagem do processo foi realizada em malha fechada aplicando no conversor de potência o sinal degrau de corrente no valor de 20 mA durante um determinado tempo. Este sinal foi convertido em um sinal degrau no valor máximo de potência, 8 KW, que pode ser

aplicado no sistema respeitando o mesmo intervalo de tempo do degrau aplicado no conversor. Mediu-se então a curva de resposta da temperatura durante o processo de aquecimento do tanque de água quente como também a curva de resposta da temperatura durante o processo de resfriamento para a vazão zero sem que houvesse interrupção no processo.

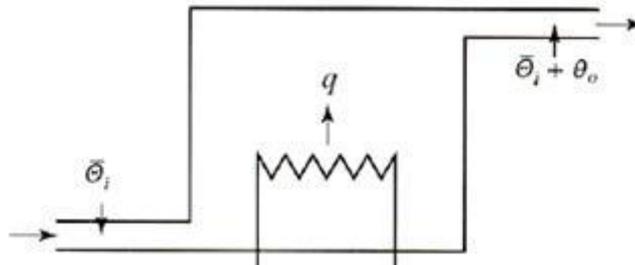


Fig. 2- Croqui do modelo térmico

A partir do ensaio de vazão zero, obtemos os valores experimentais da capacitância térmica e da resistência térmica do tanque. Com esses valores definimos o modelo matemático a ser utilizado:

Para obter um melhor modelo que descreve o sistema em questão realizou-se algumas simulações para vazões diferentes, sendo que em cada simulação a vazão era mantida constante. O valor da capacitância térmica foi estimado pelo ensaio de vazão zero e comparado com o valor teórico encontrado. Esse valor foi mantido constante durante todas as simulações realizadas.

O valor estimado teoricamente da capacitância térmica foi estimado utilizando a equação 9.

$$C = m \cdot c \quad (9)$$

onde  $m$  é a massa de água em Kg e  $c$  é o calor específico da água em  $J/kg \text{ } ^\circ C$ .

Para estimarmos o valor teórico da resistência térmica em cada simulação utilizamos o diagrama de blocos da fig. 3:

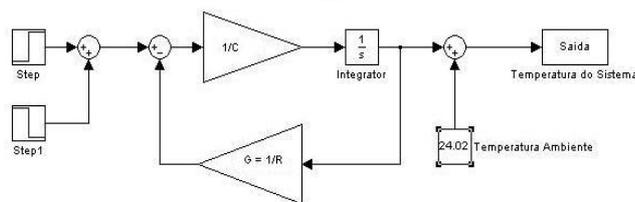


Fig. 3 – Diagrama de Blocos

Da fig. 03, obtem-se a seguinte função de transferência,

$$y(s) = \frac{R}{sRC + 1} \cdot u(s) \quad (10)$$

onde  $u(s)$  é a entrada aplicada e  $y(s)$  é a saída do sistema.

Aplicando em (10) a transformação bilinear a seguir

$$s = \frac{2z - 1}{Tz + 1} \quad (11)$$

com  $T = 1 \text{ s}$ , que é o tempo de amostragem, obtém-se

$$y(z) = \left(\frac{2RC - 1}{2RC + 1}\right) z^{-1}y(z) + \left(\frac{R}{2RC + 1}\right) z^{-1}u(z) + \left(\frac{R}{2RC + 1}\right) u(z) \quad (12)$$

Como a transformada inversa de  $z^{-1}f(z)$  fornece  $f(k-1)$ , onde  $z^{-1}$  funciona como um operador “backward shift”, a equação de diferenças do sistema assume a seguinte forma:

$$y(k) = \theta_1 y(k-1) + \theta_2 u(k-1) + \theta_3 u(k) \quad (13)$$

onde

$$\theta_1 = \frac{2RC - 1}{2RC + 1} \quad (14)$$

$$\theta_2 = \frac{R}{2RC + 1} \quad (15)$$

$$\theta_3 = \frac{R}{2RC + 1} \quad (16)$$

sendo  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  os coeficientes de atraso da saída e entradas.

O algoritmo da equação de diferenças é o modelo matemático que será utilizado para representar, de forma aproximada, o sistema de variação térmica do tanque de uma Planta Didática SMAR - PD3.

## V. O MODELO PROPOSTO

O valor da resistência térmica foi calculado a partir do modelo matemático proposto utilizando os coeficientes de atraso que foram encontrados na simulação. Tais valores encontram-se na tabela 1:

TABELA 1  
COEFICIENTES DE ATRAZO

*Vazão (l/h)	Coeficientes de Atraso		
	$\theta_1$	$\theta_2$ (x $10^{-5}$ )	$\theta_3$ (x $10^{-5}$ )
0	0,9999	0,5721	0,5274
48,8	0,9990	1,1339	0,3418
100,5	0,9984	1,2969	1,1667

149,92	0,9973	1,5237	4,1351
193,53	0,9965	1,1612	-0,0544
400,08	0,9943	1,2508	5,3937
611,3	0,9914	1,0926	0,2821
832,45	0,9931	0,7094	0,1362
997,2	0,9914	0,7814	0,0083
1206,5	0,9908	0,7732	-0,0562
1405,2	0,9896	0,6215	0,0674

\*Controle de vazão realizado manualmente

Usando os valores da Tabela 01 determinou-se os valores da resistência térmica e dos coeficientes térmicos  $G_0$  (vazão zero) e  $G$  conforme representado na figura 02 sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} G_0 = \frac{1}{R_0} \quad (17) \\ G = \frac{1}{R} - G_0 \quad (18) \end{array} \right.$$

Com os resultados dos ensaios e das simulações foi realizado uma investigação da modelagem matemática. Essa investigação consiste em comparar os resultados obtidos usando o modelo matemático com a resposta do sistema real alcançada durante os ensaios para cada vazão.

Os valores de R e G estão representados na tabela 2:

TABELA 2  
VALORES USADOS NO DIAGRAMA DE BLOCOS DA SIMULAÇÃO

Vazão (l/h)	C $\left(\frac{J}{^{\circ}C}\right)$	R $\left(\frac{J}{^{\circ}C.s}\right)$	G $\left(\frac{^{\circ}C.s}{J}\right)$
0	89000	0,185000	5,40540
48,8	89000	0,017500	51,73746
100,5	89000	0,012000	77,92793
149,92	89000	0,007500	127,92793
193,53	89000	0,004850	200,78016
400,08	89000	0,002200	449,14005
611,3	89000	0,001650	600,65520
832,45	89000	0,001200	827,92793
997,2	89000	0,000920	1081,55112
1206,5	89000	0,000765	1301,78414
1405,2	89000	0,000670	1487,13191

Os gráficos abaixo mostram a investigação realizada de acordo com as vazões:

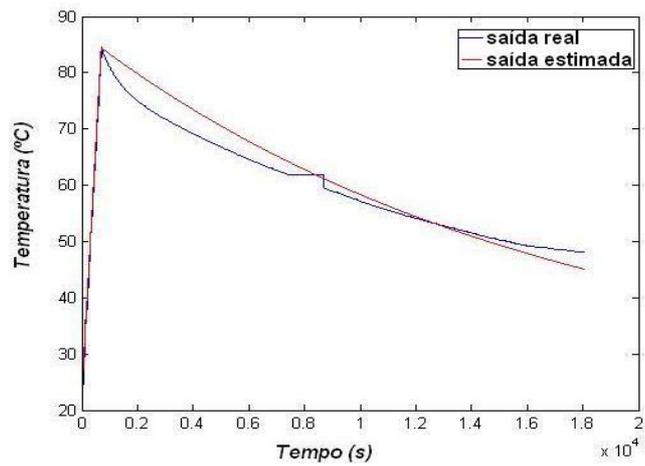


Fig. 4 – Vazão 00 l/h

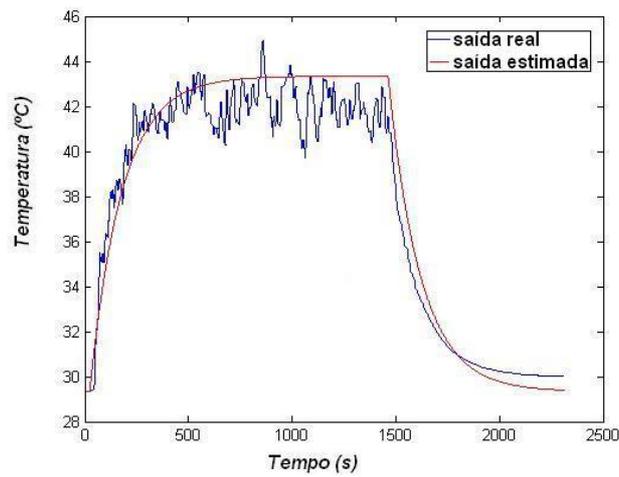


Fig. 5 – Vazão 600 l/h

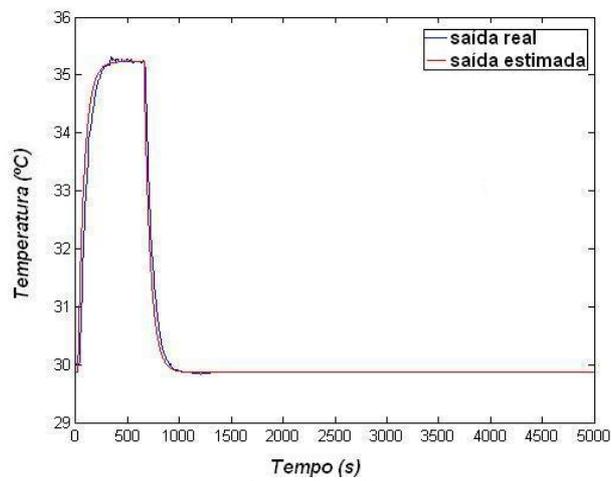


Fig. 6 – Vazão 1400 l/h

Ao analisar as fig. 4, 5 e 6 percebe-se que a resposta do modelo matemático aproxima-se dos dados do sistema real. Porém, quão geral é esse modelo? Será que ele é válido para uma situação qualquer diferente das situações que foram apresentadas nos fig. 4, 5 e 6?

Para responder as questões levantadas torna-se necessário validar o modelo proposto. Sendo assim, será garantido a veracidade do modelo. Para isso, deve-se simular o modelo sem qualquer ajuste adicional e compará-lo a dados coletados em testes diferentes daqueles usados no desenvolvimento e sintonia do modelo.

Seguindo essas orientações, realizou-se uma nova bateria de ensaios onde foram aplicados valores de entrada que se diferenciavam daquelas já utilizadas na sintonia do modelo. Então, sem novos ajustes em sua sintonia, esperava-se que o modelo matemático apresentasse uma resposta eficiente de tal forma que o seu comportamento fosse semelhante à mesma tendência de resposta do sistema real. Sendo assim, comprovou-se a veracidade do modelo porque os resultados demonstraram-se satisfatórios conforme podem ser observados nas fig. 7, 8 e 9:

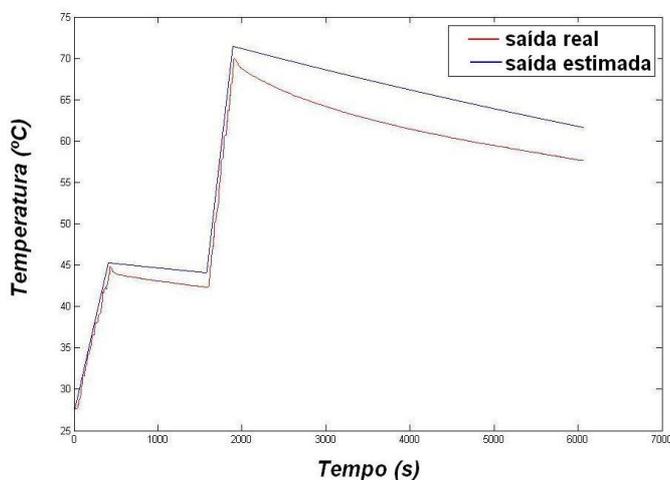


Fig. 7 – Validação Vazão 0 l/h

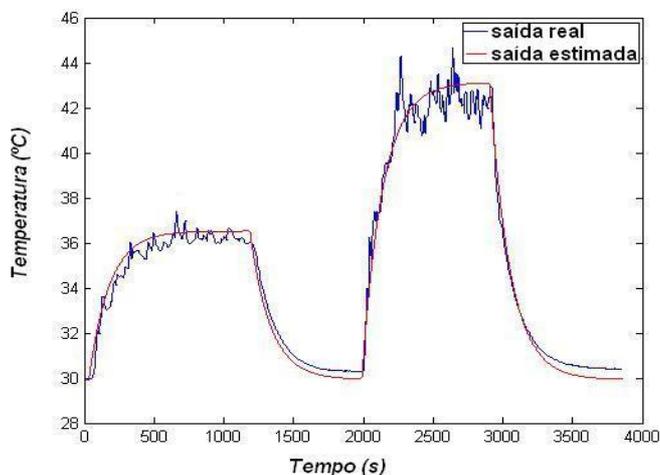


Fig. 8 – Validação Vazão 600 l/h

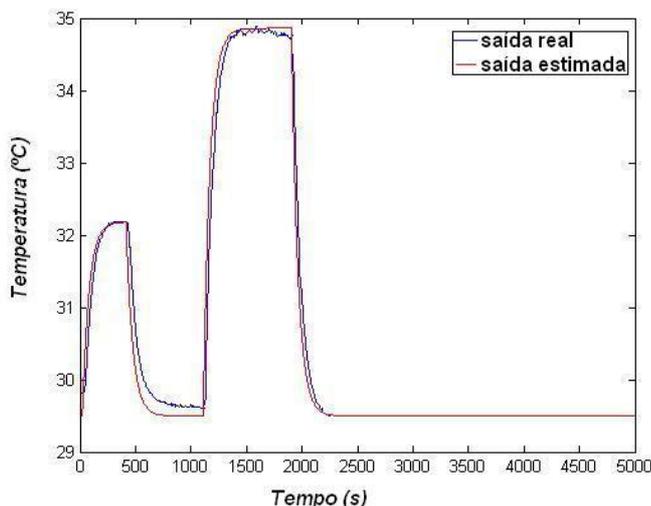


Fig. 9 – Validação Vazão 1400 l/h

Durante a coleta dos dados, tanto para a investigação da modelagem matemática quanto para a validação do modelo proposto, os ensaios realizados em uma vazão igual a 600 l/h foram os que apresentaram maior interferência de ruído. Essa análise é comprovada ao realizar uma comparação entre as fig. 5 e 8 (referentes a vazão de 600 l/h) com as demais.

## VI. CONCLUSÃO

A Modelagem Matemática é livre e espontânea. Ela surge da necessidade do homem em compreender os fenômenos que o cercam para interferir ou não em seu processo de construção.

Neste trabalho foram apresentados os resultados obtidos a partir da modelagem matemática do sistema de variação térmica do tanque de uma Planta Didática SMAR - PD3 respeitando as etapas pré-definidas anteriormente.

Na coleta de dados, a presença de ruídos não comprometeu o desenvolvimento do trabalho pois quando aplicado a correlação cruzada percebe-se uma elevada relação entre a entrada e a saída. Essa correlação pode ser exemplificada pela tabela 3:

TABELA 3  
CORRELAÇÃO CRUZADA

VAZÃO (l/h)	Entrada real X Saída real	saída real x saída estimada		
		MMQ - ARX	RMMQ	RMMQ Com fator de esquecimento
0	0.935	0.994	0.995	0.874
48,8	0.945	0.995	0.945	0.854
100,5	0.934	0.934	0.975	0.934

149,92	0.934	0.975	0.934	0.865
193,53	0.975	0.995	0.975	0.945
400,08	0.945	0.945	0.934	0.925
611,3	0.925	0.975	0.945	0.865
832,45	0.934	0.995	0.995	0.912
997,2	0.945	0.945	0.945	0.995
1206,5	0.935	0.945	0.975	0.865
1405,2	0.975	0.975	0.934	0.854

Evidenciado que existiu uma boa correlação cruzada para o banco de dados de cada simulação, realizou-se um comparativo entre o desempenho das técnicas de modelagem aplicadas. Os resultados estão apresentados nos fig. 10, 11e 12:

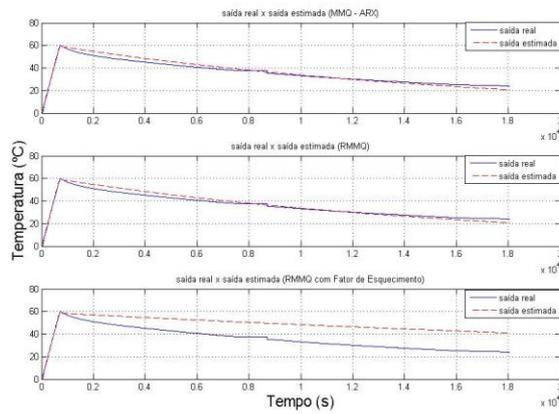


Fig. 10 – Modelos para vazão 00 l/h

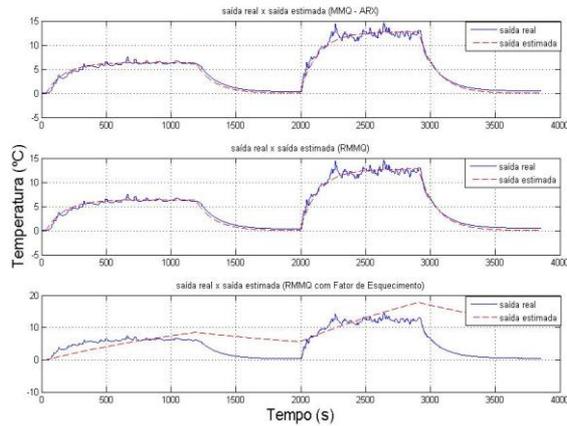


Fig. 11 – Modelos para vazão 600 l/h

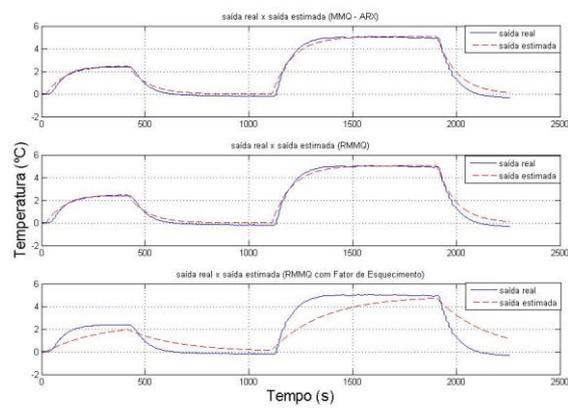


Fig. 12 – Modelos para vazão 1400 l/h

A partir dos resultados obtidos utilizando os modelos propostos comprova-se que as técnicas aplicadas foram satisfatórias. Portanto, as técnicas de modelagem matemática abordadas neste trabalho foram válidas, sendo que o modelo proposto mostrou-se eficiente para representar o sistema físico.

## VII. REFERENCIAS

- [1] Departamento de Engenharia de Aplicações, *Manual Planta Didática III*, Documento Interno SMAR,2004.
- [2] AGUIRRE,L. A., *Introdução à Identificação de Sistemas*, 2ª Edição, Belo Horizonte: Editora UFMG,2004.
- [3] GARCIA, C. *Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos*. EDUSP. São Paulo, 1997.
- [4] LJUNG, L.,*System Identification - Theory For the User*. 2nd ed, PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1999.
- [5] SIMOES,A. S. *Regressão e predição de trajetórias: um comparativo das técnicas clássicas e sua aplicação para a visão computacional no domínio do futebol de robôs*. Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais.USP. São Paulo, 1998.
- [6] CONGER, G. M., Corradi, F. *Controle de um Processo com Compensação de Atraso Utilizando o Nível Fieldbus HI*, Universidade Federal de Santa Catarina, Documento Interno, 2004.
- [7] OGATA, K. , *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª Edição, São Paulo: Prentice Hall, 2003.
- [8] BERG, R T., *Estimation and Prediction for Manueuveing Target Trajectories*. In: IEEE Trans. Automat. Contr., vol AC-28, pp 294-304, Mar. 1983.
- [9] PONS, J. C. *Identificação e controle de sistemas dinâmicos com redes neurais*. Dissertação de mestrado. EPUSP. São Paulo, 1998.
- [10] Hung, E. S., Generating Efficient dynamical models for microelectromechanical systems from few finiteelement simulations run, IEEE Journal of Microelectromechanical Systems, vol. 8, pp. 280-289, (1999).
- [11] Belloquim, A. *Modelagem de Software: Ontem, hoje e amanhã*. Rio de Janeiro, Developers´ Magazine, junho 2002.
- [12] Ben-Shaul I. Z.; Kaiser G. E. *A paradigm for decentralized process modeling and its realization in the oz environment*. IEEE, 179-188, 1994.
- [13] Cereja Junior, M. G.; Sant´Anna, N.; Borrego Filho, L. F.; Luque, L.; Casilo, B. H. *Modelando um Processo de Gestão de Problemas em Projeto – UML e PML uma Exploração de Abordagens para a Modelagem de Processos*. Recife, SIMPROS Simpósio Internacional de Melhoria de Processos de Software, 2002.

- [14] Georgakopoulos, D.; Hornick, M. *An Overview of Workflow Management: From Process Modeling to Workflow Automation Infrastructure*. Boston, Distributed and Parallel Databases, v.3, 119-153, 1995
- [15] Schleicher, A.; Westfechtel, B.; Jäger, D. Modeling Dynamic Software Process in UML. Germany, Technical Report AIB 98-11, RWTH Aachen, 1998.
- [16] Haykin
- [17] Oppherainy