

Análise de Singularidades de Curvas no Plano \mathbb{R}^2 Aplicadas à Robótica

Mateus Henrique dos Anjos Oliveira

mateus.h.oliveira@ufv.br

ODS 9: Indústria, Inovação e Infraestrutura

Ady Cambraia Junior

ady.cambraia@ufv.br

Mostafa Salarinoghabi

mostafa.salarinoghabi@ufv.br

Categoria: 2

Introdução

A robótica moderna depende da análise precisa do movimento de manipuladores. Um desafio central é a ocorrência de **singularidades**: configurações específicas onde o robô perde um ou mais graus de liberdade. Nesses pontos, movimentos tornam-se impossíveis e o controle pode falhar. Este trabalho utiliza ferramentas da geometria diferencial e da teoria das singularidades para modelar, identificar e classificar essas configurações críticas, visando o desenvolvimento de robôs mais seguros e eficientes.

Metodologia

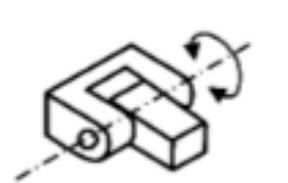
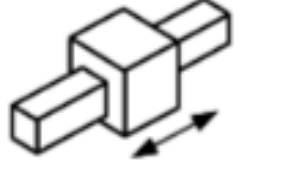

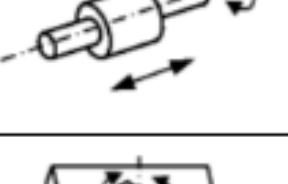
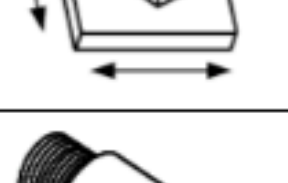

O presente trabalho foi conduzido sob uma metodologia de pesquisa teórico-analítica com abordagem qualitativa. A base do estudo foi construída a partir de duas frentes principais: uma extensa revisão bibliográfica da literatura sobre geometria diferencial, teoria de singularidades e cinemática de robôs; e reuniões semanais com os orientadores para a apresentação de seminários, discussão dos conceitos e validação dos resultados. A fundamentação teórica utilizada para a análise matemática das singularidades robóticas baseia-se nos seguintes pilares:

O Grupo dos Movimentos Rígidos: A configuração de um robô é descrita por elementos do **Grupo Euclidiano Especial** $SE(3)$, que modela todas as transformações rígidas no espaço.

Grupos de Lie e Variedades: O espaço de configurações do robô é tratado como um *grupo de Lie*, uma estrutura que é ao mesmo tempo uma variedade diferenciável e um grupo algébrico, permitindo a aplicação do cálculo.

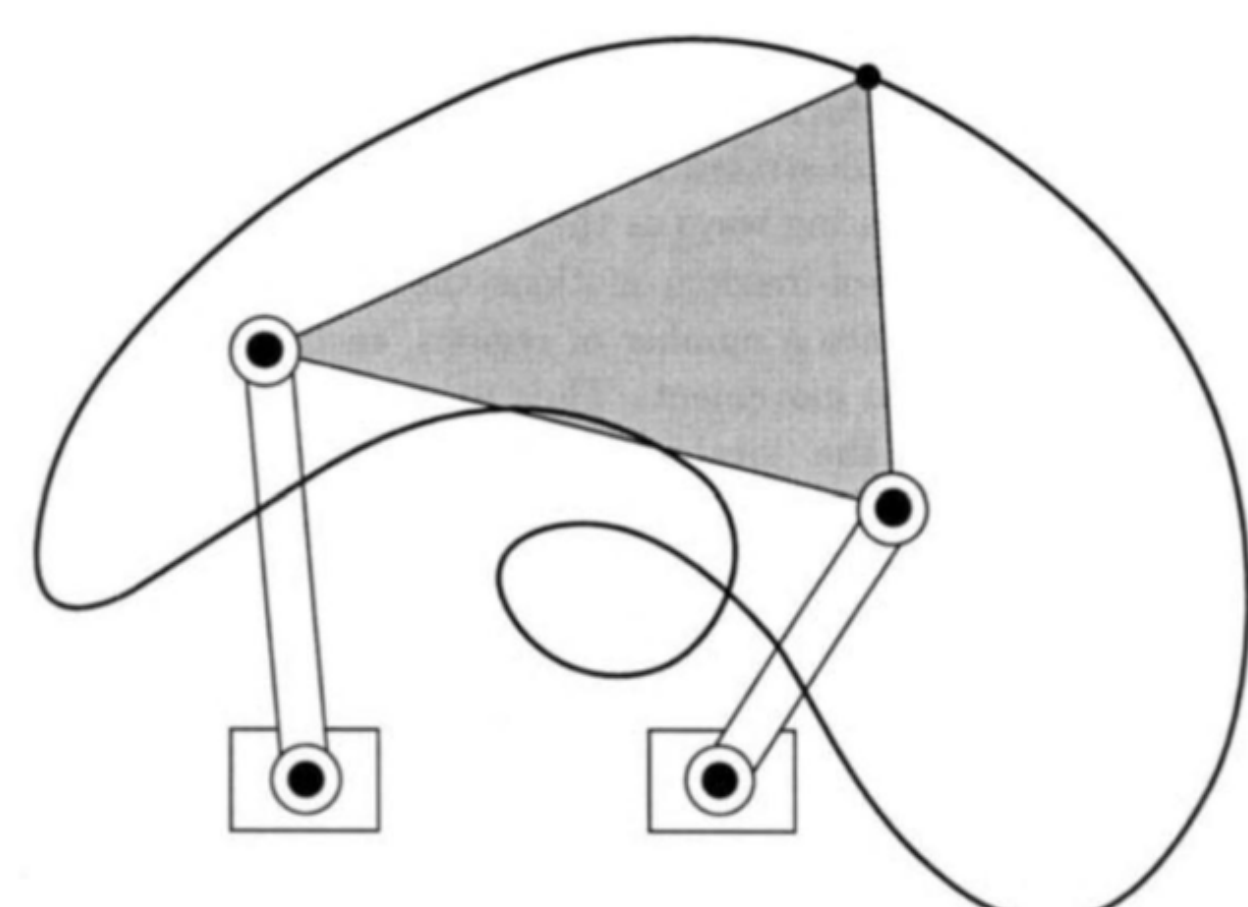
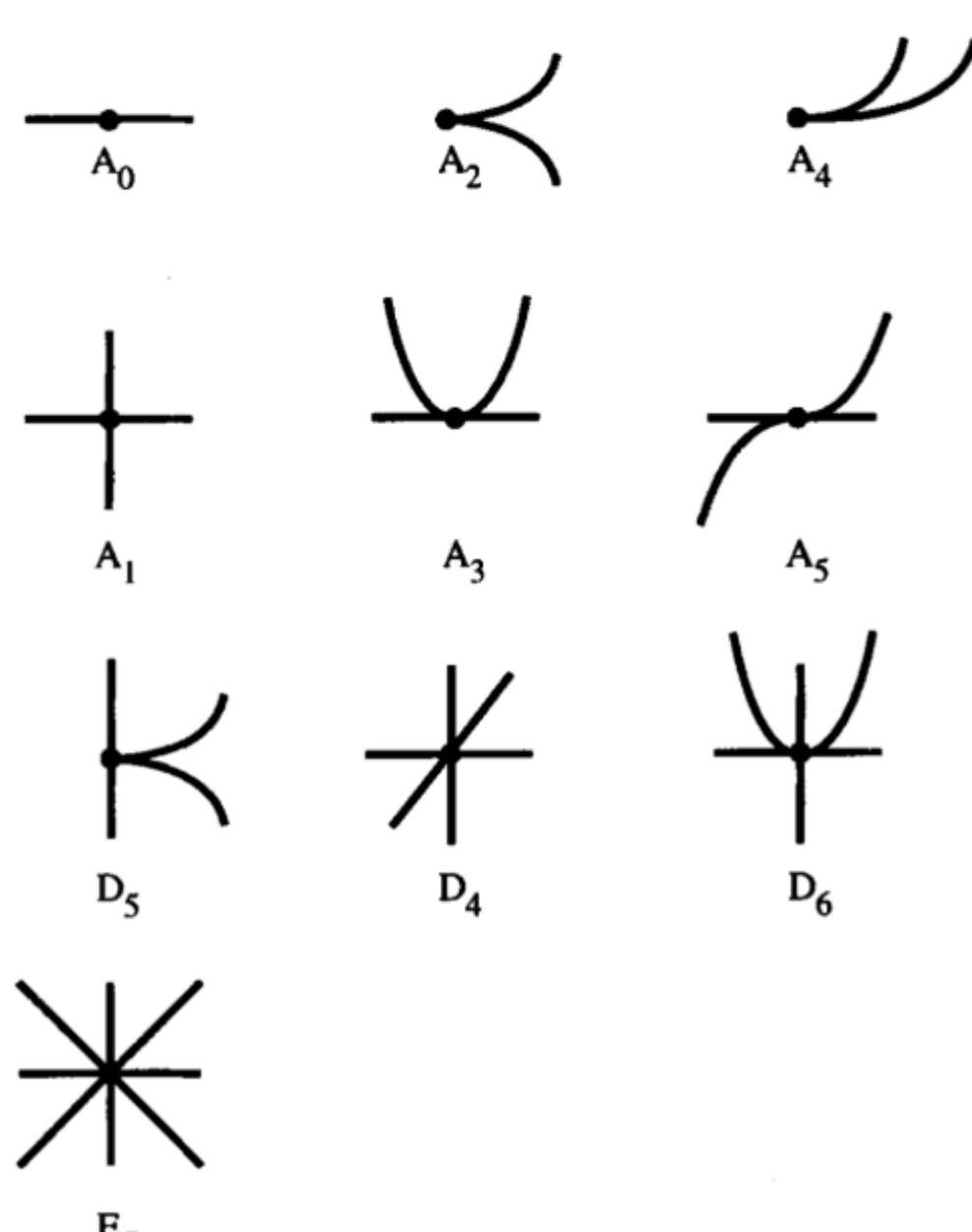
Singularidades e a Jacobiana: A detecção de singularidades é realizada pela análise da matriz Jacobiana. Uma perda de posto nesta matriz indica que o robô perdeu graus de liberdade, atingindo uma configuração singular.

Preliminares

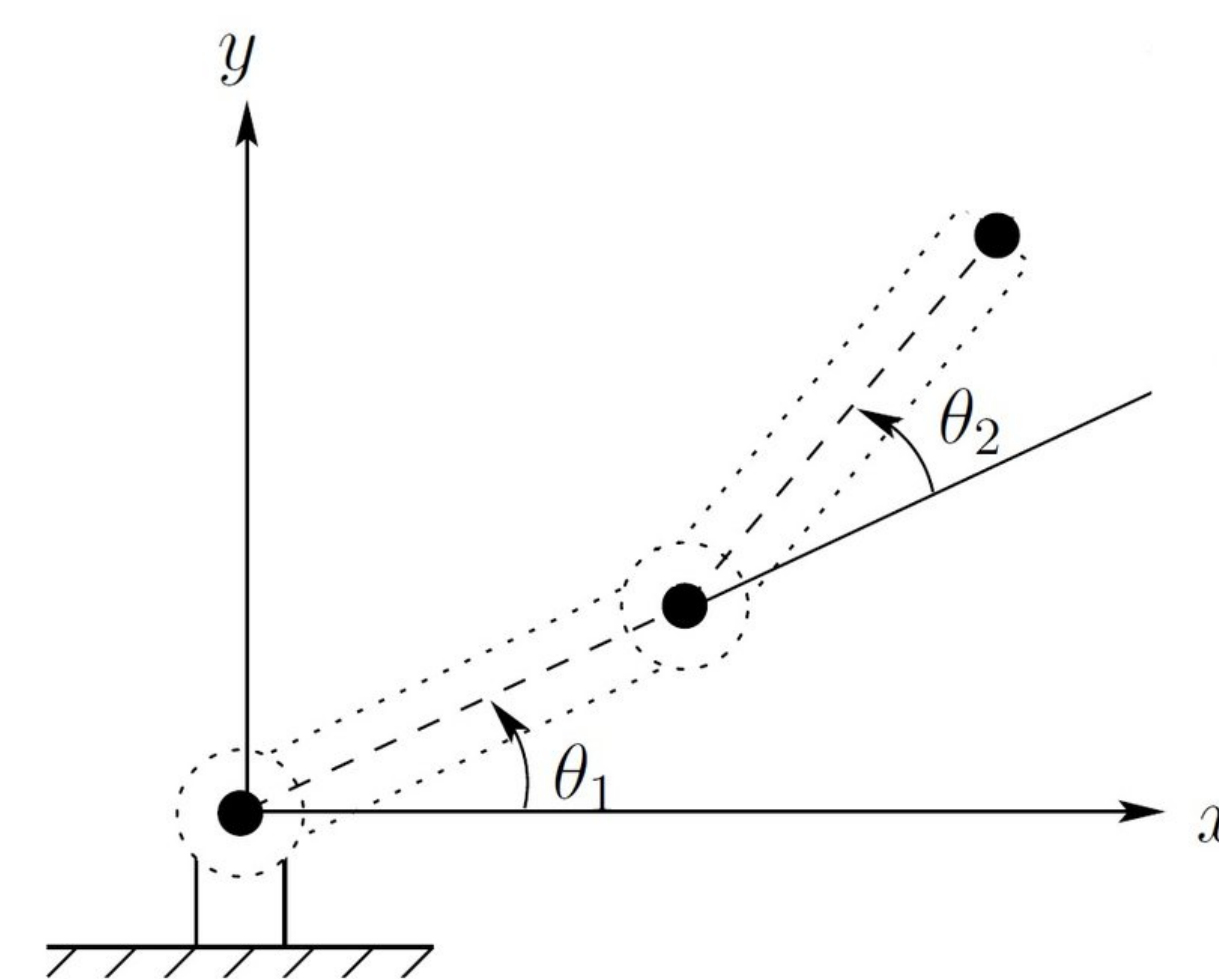
Lower Kinematic Pairs		
Designation	Geometry	Degrees of Freedom
Rotation		1
Translation or Prismatic		1
Spherical or Globular		3
Cylindrical		2
Planar		3
Helical or Screw		1

Do ponto de vista da geometria diferencial, cada par cinemático inferior corresponde a uma superfície em \mathbb{R}^3 que é invariante sob a ação de um subgrupo específico do grupo Euclidiano $SE(3)$. Esses subgrupos determinam os movimentos permitidos de cada tipo de junta, como rotações puras, translações ou movimentos combinados e, assim, definem as restrições do mecanismo robótico. Essas restrições de movimento estão profundamente ligadas ao estudo das singularidades: quando a composição de várias ações de juntas resulta em uma matriz Jacobiana com posto deficiente, o robô atinge uma configuração singular. Ao analisar a clássica ligação planar de 4 barras, seu espaço de configuração é uma variedade unidimensional.

Segundo a teoria das singularidades, apenas três tipos de bifurcação de codimensão 1 podem aparecer localmente em sistemas genéricos de um grau de liberdade: **cúspides**, **tacnodos** e **pontos triplos**.



Resultados



Considere um robô planar com dois graus de liberdade (2DOF), cujo espaço de configuração é parametrizado por (θ_1, θ_2) , onde θ_1 e θ_2 são os ângulos das juntas. A posição de seu efetuador final é dada por:

$$\begin{aligned} x(\theta_1, \theta_2) &= \ell_1 \cos(\theta_1) + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y(\theta_1, \theta_2) &= \ell_1 \sin(\theta_1) + \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (1)$$

As singularidades do robô ocorrem quando $\theta_2 = 0$ ou $\theta_2 = \pi$. Como observamos, o conjunto singular da aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta_1, \theta_2) &\mapsto (x(\theta_1, \theta_2), y(\theta_1, \theta_2)) \end{aligned}$$

é o conjunto $\Sigma(\Phi) = \{(\theta_1, 0); 0 < \theta_1 < 2\pi\} \cup \{(\theta_1, \pi); 0 < \theta_1 < 2\pi\}$. Assuma um robô planar de 2 elos com comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 . Além disso, introduzimos o obstáculo parametrizado por $\gamma(s) = (f(s), g(s))$.

Teorema: Seguindo as suposições e notações acima, suponha que o obstáculo γ não passe pela origem. Assuma que $f(s) \neq 0$. O Perfil $\Phi(\Sigma(\Phi))$ possui dois componentes. Se $\ell_1 \neq \ell_2$, então as singularidades do perfil são mais degeneradas que uma cúspide ordinária. Se $\ell_1 = \ell_2$, então $\Phi(\Sigma(\Phi))$ possui um componente. Quando $\theta_2 = \pi$, nenhuma colisão ocorre.

Conclusões

Esse estudo foi fundamental para compreender o impacto prático das singularidades no controle de manipuladores planares. Além disso, foram identificadas duas possíveis linhas de pesquisa futuras, que podem ser desenvolvidas em artigos específicos:

- Análise de Singularidades Cinemáticas Induzidas por Obstáculos:** Estudar a cinemática de um manipulador planar sob as restrições impostas por obstáculos em seu espaço de trabalho. O foco é investigar e classificar as singularidades que emergem no espaço de configurações do robô em função da geometria dos obstáculos, modelados como curvas no plano \mathbb{R}^2 .
- Projeto geométrico do braço robótico:** explorar como a escolha dos comprimentos dos elos ou até mesmo formatos alternativos de braços poderiam minimizar ou evitar determinadas singularidades.

Bibliografia

- Selig, J. M. (2005). *Geometric Fundamentals of Robotics*. Springer.
- Selig, J. M. (2007). *Geometrical Foundations of Robotics*. Springer.
- Tari, F., Salarinoghabi, M., Hasegawa, M. (2025). Geometric deformations of discriminants and apparent contours. Springer.
- A. Cambraia Jr., M. Oliveira and M. Salarinoghabi, Singularities in Planar Movements of Robots with 2 Degrees of Freedom in Environments with Obstacles. In preparation.
- Lower kinematic pairs. Retrieved from https://www.researchgate.net/figure/Figura-119-Juntas-cinematicas-inferiores-Reuleaux-distingue-seis-juntas-cinematicas_fig2_296332691

Apoio Financeiro

