

## A Óptica via Teoria da Catástrofe

Luiza Vitória Silva Silveira, Alana Cavalcante Felippe

ODS4 – Educação de qualidade

Pesquisa

### Introdução

A Teoria da Catástrofe, proposta por René Thom, oferece ferramentas matemáticas para descrever mudanças abruptas em sistemas dinâmicos e compreender singularidades. Na óptica, fenômenos como reflexão e refração são bem compreendidos, mas a formação de cáusticas apresenta desafios adicionais. Este trabalho investiga principalmente como a teoria pode explicar a origem e a estrutura geométrica das cáusticas, integrando conceitos da Física e da Matemática.

### Objetivos

Explorar a interação entre a óptica e a Teoria da Catástrofe, com ênfase na formação de cáusticas e singularidades ópticas. Analisar exemplos como a catástrofe de dobra, de cúspide e o fenômeno natural do arco-íris, estabelecendo conexões entre modelagem matemática e interpretação física.

### Metodologia

O estudo baseou-se em revisão bibliográfica e na análise matemática de modelos da Teoria da Catástrofe aplicados à óptica. Foram considerados conceitos de envelopes, bifurcações, equações diferenciais e soluções assintóticas de equações de onda. Com ênfase na formação de cáustica dada pelo envelope de raios de luz refletidos.



**Figura 1:** Curva cáustica  
**Fonte:** Próprio autor

Pela equação do raio refletido:

$$(y - \sin \theta) \cos 2\theta = (x - \cos \theta) \sin 2\theta$$

O envelope de uma família de curvas, parametrizada por  $\theta$ , obtemos:

$$\begin{cases} x = \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \cos 2\theta \\ y = \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \sin 2\theta \end{cases}$$

A Catástrofe de Dobra é descrita como:  $V_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax$

E a Catástrofe de Cúspide é:  $V_{ab}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$

Na Dobra, a variação de  $a$ , pode criar ou destruir pontos críticos e na Cúspide, a variação de  $a$  e  $b$  podem gerar uma bifurcação a medida que eles variam.

### Resultados

Foram descritos e classificados fenômenos ópticos como as cáusticas e o arco-íris sob a perspectiva da Teoria da Catástrofe. Identificou-se que a catástrofe de Dobra explica a estrutura do arco-íris, enquanto a catástrofe de Cúspide descreve geometrias mais complexas. As análises evidenciaram a relevância do uso de ferramentas matemáticas avançadas na óptica.

### Conclusões

A Teoria da Catástrofe fornece um arcabouço sólido para compreender a formação de cáusticas e singularidades ópticas. A abordagem comprovou que essas singularidades, podem ser descritas por modelos matemáticos que capturam mudanças qualitativas no comportamento da luz. O trabalho integrou aspectos físicos e matemáticos, evidenciando a importância de abordagens interdisciplinares. Além da contribuição acadêmica, a pesquisa foi relevante para minha formação.

### Bibliografia

- ARNOLD, V. I. Teoria das catástrofes. Editora da Unicamp, 1949.
- POSTON, T.; STEWART, I. Catastrophe Theory and Its Applications. FT Prentice Hall, 1978.
- THOM, R. Les singularités des applications différentiables. Annales de l'Institut Fourier (Grenoble, France), 1956.

### Apoio Financeiro