Simpósio de Integração Acadêmica
"Das Montanhas de Minas ao Oceano: Os Caminhos da Ciência para um Futuro Sustentável"
SIA UFV 2025

Universidade Federal de Viçosa

Análise Geométrica, EDP's em Geometria Diferencial e o problema de Yamabe.

Érick de Castro Vieira Magalhães; Anderson Luis Albuquerque de Araújo (Orientador)

ODS1: Dimensões Sociais

Categoria:Pesquisa

Introdução

A Análise Geométrica é um campo que relaciona técnicas de Equações Diferenciais Parciais (EDP's) e Análise para estabelecer resultados em Topologia e Geometria Diferencial. A área nasce na década de 1960 com os trabalhos de S.-T. Yau, K. Uhlenbeck, R. Schoen, R. Hamilton, L. Niremberg e J. Nash, que buscavam estudar a estrutura de variedades diferenciáveis do ponto de vista da análise (principalmente de equações elípticas).

Nosso objetivo é apresentar os aspectos históricos e motivacionais desta área por um de seus problemas mais tradicional: a busca pela existência de métricas Riemannianas especiais que atuam como solução de equações diferenciais parciais geométricas. Em particular vamos usar como exemplo o problema de Yamabe, o qual procura uma métrica conforme capaz de resolver a equação de Yamabe.

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + S_g\, u = \lambda\, u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad u > 0$$

Objetivos

O objetivo do projeto é estudar os fundamentos da Análise Geométrica através de um problema específico (o problema de Yamabe) e dessa forma explorar os tópicos matemático adjacentes à área, como a Geometria Diferencial e conforme, Análise Funcional e de equações elípticas, Topologia e o cálculo de variações .

Material e Métodos ou Metodologia

Os resultados que estamos interessados começam com Teorema de Uniformização, conjecturado por Felix Klein em 1883, e provado por Henri Poincaré em 1907:

Teorema *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta bidimensional. Então existe uma métrica $\tilde{g}$ que é conforme a g tal que $(M, \tilde{g})$ possui curvatura Gaussiana constante.*

Em 1960, H. Yamabe conjecturou que o Teorema de Uniformização podia ser generalizado da seguinte forma:

Conjectura *Seja M uma variedade compacta de dimensão $n \geq 3$ sem bordo, e seja g uma métrica Riemanniana em M. Então existe uma métrica $\tilde{g}$ que é conforme a g, tal que $(M, \tilde{g})$ possui curvatura escalar constante.*

Qualquer métrica conforme à métrica g pode ser escrita como $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$, em que u é uma função real positiva e suave definida em M.

O problema de Yamabe apresenta uma relação entre as expressões das curvaturas escalares $S_{\tilde{g}}$ e S_g dada por :

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + S_g u = S_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

$\Delta_g = \text{div}_\nabla(\text{grad}) = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\sum_{j=1}^n g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$ denota o operador de Laplace-Beltrami associado à métrica g.

Do ponto de vista analítico, este problema equivale a encontrar uma solução positiva $u \in C^\infty(M)$ de uma equação elíptica não linear, dada por:

$$\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \frac{n-2}{4(n-1)}\tilde{S} u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad \text{em } M$$

em que $\tilde{S}$ é uma constante.

Apoio Financeiro

O projeto é financiado pela FAPEMIG (BIC 7403)

CAPES FAPEMIG CNPq

Resultados

Operador de Laplace–Beltrami para S^2

como um exemplo prático da construção do operador de Laplace–Beltrami para superfícies, podemos encontrar a sua forma para a esfera. Neste caso consideramos as coordenadas esféricas que a parametrizam :

$$\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\phi \\ y &= R\sin\theta\sin\phi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned}$$

O Elemento de linha no $\mathbb{R}^3$ é

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 d\theta^2 + R^2\sin^2\theta d\phi^2$

onde

dx = R$\cos\theta\cos\phi\, d\theta - R\sin\theta\sin\phi\, d\phi$,
dy = R$\cos\theta\sin\phi\, d\theta + R\sin\theta\cos\phi\, d\phi$,
dz = -R$\sin\theta\, d\theta$

A matriz do tensor métrico é então dada por $g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$

e por isso obtemos $\sqrt{|g|} = R^2\sin\theta$

Substituindo os valores obtemos o Operador de Laplace–Beltrami Para S^2 obtemos:

$$\boxed{\Delta_{S^2} = -\frac{1}{R^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]}$$

Retomando ao problema, este foi resolvido com os trabalhos de Yamabe, Trudinger, Aubin e Schoen. A perspectiva analítica do problema ganha ênfase em variedades Riemannianas, com a solução da equação observando o expoente crítico, em que técnicas conhecidas não funcionam.

Yamabe observou que a equação estava relacionada ao funcional dado por

$$Y(g) := \inf_{u \in C^\infty(M), u \neq 0} \frac{\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2}|\nabla u|^2 + S_g u^2\right) dv_g}{\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder, podemos verificar que tal funcional é limitado inferiormente, e daí consideramos a constante

$$\mu(M) := \inf_{u \in H_2^1(M), u \neq 0} \frac{\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2}|\nabla u|^2 + S_g u^2\right) dv_g}{\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

que é essencial para a solução do problema

Conclusões

A constante $\mu(M)$ indica se é possível deformar conformalmente a métrica g para obter outra de curvatura escalar constante. A solução envolve ainda o expoente crítico $\frac{n+2}{n-2}$ e a imersão contínua de Sobolev $H_2^1 \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}$. O problema de Yamabe é um marco na análise geométrica, ele conecta a geometria de variedades Riemannianas às equações elípticas não lineares, busca métricas conformes com curvatura escalar constante e abre caminho para técnicas variacionais e resultados de existência e regularidade, demonstrando grande conexóes entre Análise e Geometria.

Bibliografia

NOGUEIRA, M. A. C. Uma classe de equações tipo Yamabe e teoria de blow-up em H¹(M). 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2015.