Simpósio de Integração Acadêmica
"Das Montanhas de Minas ao Oceano: Os Caminhos da Ciência para um Futuro Sustentável"
SIA UFV 2025

Universidade Federal de Viçosa

# Geometrias Combinatórias: Matroides e suas Aplicações

João Vitor Apolinário Araújo Godinho; Allan de Oliveira Moura (Orientador)

ODS 9 - Dimensões Econômicas

Categoria: Pesquisa

## Introdução

Matroides são estruturas combinatórias que abstraem as noções de independência e dependência linear. Foram introduzidos, em 1935, pelo matemático Hassler Whitney, em seu artigo *"On the Abstract Properties of Linear Dependence"*, motivados pela percepção do autor de similaridades entre a teoria dos grafos e a álgebra linear. No decorrer do século passado, a teoria dos matroides foi muito expandida e, notoriamente, caracteriza-se por sua interação com diversas áreas da matemática, como a geometria algébrica, teoria de códigos, dentre outras. O matemático italiano Gian-Carlo Rota escreveu *"It is as if one were to condense all trends of present day mathematics onto a single structure, a feat that anyone would a priori deem impossible, were it not for the fact that matroids do exist"* [2].

Definição 1. ***(Matroide)*** Um *matroide* $M$ é um par ordenado $(E, \mathcal{I})$, em que $E$ é um conjunto finito e $\mathcal{I}$ uma coleção de subconjuntos de $E$, que satisfaz as seguintes propriedades:

**(I.1)** *(Existência)* $\emptyset \in \mathcal{I}$

**(I.2)** *(Hereditariedade)* Se $I_2 \in \mathcal{I}$ e $I_1 \subseteq I_2$, então $I_1 \in \mathcal{I}$

**(I.3)** *(Aglutinação)* Se $I_1$ e $I_2 \in \mathcal{I}$ e $|I_1| < |I_2|$, então existe $x \in I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup x \in \mathcal{I}$

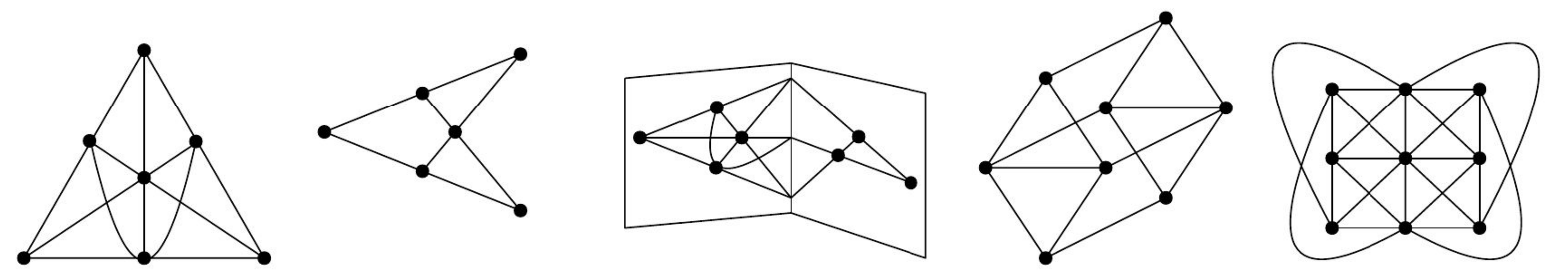

**Figura 1:** Representação geométrica de alguns matroides usuais.

Os contextos mais fundamentais em que matroides aparecem são na álgebra linear, através da noção típica de independência linear, e na teoria de grafos, na classificação de caminhos em grafos como cíclicos ou acíclicos. Outra situação em que surgem é na coleção de transversais parciais de uma família de conjuntos, que pode ser vista como a coleção de emparelhamentos, em subconjuntos das classes de vértices, de grafos bipartidos.

Para um conjunto finito $S$, uma família de subconjuntos de $S$ é uma sequência finita $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ tal que $A_j \subseteq S$, $\forall\, j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$. Um *transversal* de $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ é um subconjunto $T = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de $S$ tal que $e_j \in A_j$, para qualquer $j \in J$, com os elementos de $T$ todos distintos.

Se $X \subseteq S$, dizemos que $X$ é *transversal parcial* de $(A_j \mid j \in J)$ se $X$ é transversal de $(A_j \mid j \in K)$ para algum $K \subseteq J$. Transversais surgem naturalmente em muitos problemas de otimização, do tipo de agendamento e alocação de tarefas, e possuem muitas aplicações práticas. No trabalho, tratamos, principalmente, de como matroides se relacionam com o Teorema do Casamento de Hall, um resultado fundamental em otimização combinatória, que determina condições necessárias e suficientes para que uma família de conjuntos possua um transversal, ou seja, para que a cada elemento da família possa ser escolhido algum representante, sem que haja repetição.

## Objetivos

O objetivo do projeto é estudar os fundamentos da teoria de matroides, além de explorar tópicos adjacentes a área, como grafos bipartidos, transversais, problemas de empacotamento e cobertura, polítopos convexos, polímatroides e programação linear e possíveis aplicações na matemática ou áreas afins.

## Metodologia

Determinados os tópicos de estudo, foi feita uma revisão bibliográfica das principais obras existentes na literatura e realizada, semanalmente, uma discussão com o professor orientador.

## Apoio Financeiro

O projeto é realizado como parte do PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado da OBMEP, com apoio do CNPq.

## Resultados

Um matroide sobre um conjunto $E$ pode ser definido de várias formas, dentre elas, por meio da função $\rho$ que caracteriza a dimensão de seus subconjuntos:

Definição 2. ***(Matroide via Função Posto)*** Seja $E$ um conjunto finito e $\rho : 2^E \to \mathbb{Z}^+$, que satisfaça as propriedades a seguir:

**(P.1)** *(Normalização)* Se $X \subseteq E$, então $0 \leq \rho(X) \leq |X|$

**(P.2)** *(Incrementação)* Se $X \subseteq Y \subseteq E$, então $\rho(X) \leq \rho(Y)$

**(P.3)** *(Submodularidade)* Se $X$ e $Y$ são subconjuntos de $E$, então

$$\rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Seja $\mathcal{I}$ a coleção de subconjuntos de $E$ tais que $\rho(X) = |X|$. Então, $(E, \mathcal{I})$ é um matroide e $\rho$ sua função posto.

A função posto de um matroide é um exemplo de função *submodular*, que são funções que satisfazem **(P.3)**. Funções desse tipo aparecem em diversos contextos, caracterizando, de modo natural, uma propriedade de "rendimentos decrescentes", favorável para problemas de otimização.

Teorema 1. Seja $\mathcal{A}$ a família $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ de subconjuntos de um conjunto $S$. Seja $\mathcal{I}$ a coleção de transversais parciais de $\mathcal{A}$. Então, $\mathcal{I}$ é a coleção de conjuntos independentes de um matroide $M$ sobre $S$. Naturalmente, chamamos $M$ de *matroide transversal.*

Teorema 2. ***(do Casamento, Philip Hall)*** Uma família $(A_j \mid j \in J)$ possui um transversal se, e somente se, para todo $K \subseteq J$, $|K| \leq |\bigcup_{j \in K} A_j|$.

O Teorema de Rado, a seguir, é uma generalização do Teo. do Casamento, usando matroides.

Teorema 3. ***(Richard Rado)*** Seja $(A_j \mid j \in J)$ uma família de subconjuntos de $S$ e $M$ um matroide sobre $S$, com função posto $\rho$. A família $(A_j \mid j \in J)$ tem um transversal se, e somente se, para todo $K \subseteq J$, $|K| \leq \rho\,(\bigcup_{j \in K} A_j)$.

Outra generalização, utilizando funções submodulares foi dada por Dominic Welsh, em 1971.

Teorema 4. ***(Dominic Welsh)*** Seja $\mathcal{A} = (A_j \mid j \in J)$ uma família de subconjuntos de um conjunto $S$ e $f : 2^E \to \mathbb{Z}^+$ uma função crescente e submodular. A família $\mathcal{A}$ possui um sistema de representantes $(e_j \mid j \in J)$ tal que $|K| \leq f\,(\{e_j \mid j \in K\})$, para todo $K \subseteq J$ se, e somente se,

$$|K| \leq f\,(\bigcup_{j \in K} A_j)\,,\ \forall\, K \subseteq J.$$

## Conclusão

Os teoremas vistos mostram um pouco da relação íntima que existe entre transversais, matroides e funções submodulares. Uma aplicação, por exemplo, é determinar mais facilmente transversais parciais maximais ou emparelhamentos maximais, que são as bases do matroide transversal sobre um determinado conjunto considerado, utilizando técnicas da teoria de matroides, como as propriedades do matroide dual.

## Bibliografia

**[1]** James Oxley. *Matroid theory*. 2ª. Oxford Graduate Texts in Mathematics. New York: Oxford University Press Inc., 2011.

**[2]** Joseph. P. S. Kung. *A Source Book in Matroid Theory*. New York: Springer, 1986.

**[3]** Hassler Whitney. *"On the Abstract Properties of Linear Dependence"*. Em: Hassler Whitney Collected Papers (1992), pp. 147–171.

**[4]** Dominic J. A. Welsh. *"Generalized Versions of Hall's Theorem"*. Em: Journal of Combinatorial Theory (1971), pp. 95–101.

**[5]** Richard Rado. "A theorem on independence relations". Em: The Quarterly Journal of Mathematics 1 (1942), pp. 83–89.

CAPES FAPEMIG CNPq