Simpósio de Integração Acadêmica
"Das Montanhas de Minas ao Oceano: Os Caminhos da Ciência para um Futuro Sustentável"
SIA UFV 2025

UFV Universidade Federal de Viçosa

ITERAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS E RANDOMICIDADE

Vítor Emídio Simoncini, Alexandre Miranda Alves

ODS 09: Indústria, Inovação e Infraestrutura

Pesquisa

Introdução

A teoria da iteração generalizada de funções racionais e holomorfas estende os conceitos clássicos da teoria de Fatou-Julia para cenários onde a função iterada pode variar a cada passo. Essa abordagem permite estudar sistemas dinâmicos mais complexos, incluindo composições aleatórias de funções, e revela fenômenos dinâmicos que não são observados na iteração de uma única função fixa. A dinâmica de tais sistemas é influenciada pela natureza das sequências de funções envolvidas, e resultados significativos foram obtidos sob diferentes condições, como coeficientes limitados, crescimento lento ou rápido, e proximidade assintótica a uma função dada.

No contexto clássico, a teoria de Fatou-Julia estuda o comportamento global das iterações de uma função racional fixa, dividindo o plano complexo em dois conjuntos principais: o conjunto de Fatou, onde as iterações formam uma família normal, e o conjunto de Julia, onde ocorre comportamento caótico. No entanto, quando se considera composições de sequências de funções racionais ou holomorfas, muitas das propriedades conhecidas falham em se manter. Por exemplo, o conjunto de Julia pode ter pontos interiores, ser finito ou até mesmo contável, ao contrário do caso clássico, onde é sempre um conjunto perfeito e não vazio. Essas diferenças destacam a complexidade adicional introduzida pela variação das funções em cada etapa da iteração.

Uma das principais questões investigadas é a existência e estrutura dos conjuntos de Fatou e Julia para composições generalizadas. Em particular, quando as funções da sequência estão próximas de uma função fixa hiperbólica ou polinomial-like, muitos resultados clássicos podem ser estendidos, embora as demonstrações frequentemente exijam abordagens distintas. Por exemplo, se as funções são polinômios com coeficientes limitados e satisfazem certas condições de crescimento, o conjunto de Julia associado à composição é perfeito e não possui pontos interiores. Além disso, sob condições adequadas, é possível garantir a existência de uma função de Green para o domínio de atração no infinito, o que fornece ferramentas poderosas para analisar a geometria e a dimensão fractal do conjunto de Julia.

A dinâmica das composições aleatórias também é um tópico central. Quando as funções são escolhidas aleatoriamente a partir de uma família parametrizada, sob certas condições, o conjunto de Julia quase certamente não possui pontos interiores e sua medida de Lebesgue é zero. Esse resultado é análogo ao teorema de Fornaess-Sibony, que estabelece condições sob as quais as iterações aleatórias convergem para um conjunto de atração. No entanto, para composições reversas (backward compositions), o comportamento pode ser radicalmente diferente, com o conjunto de Julia exibindo pontos interiores e medida positiva.

Objetivos

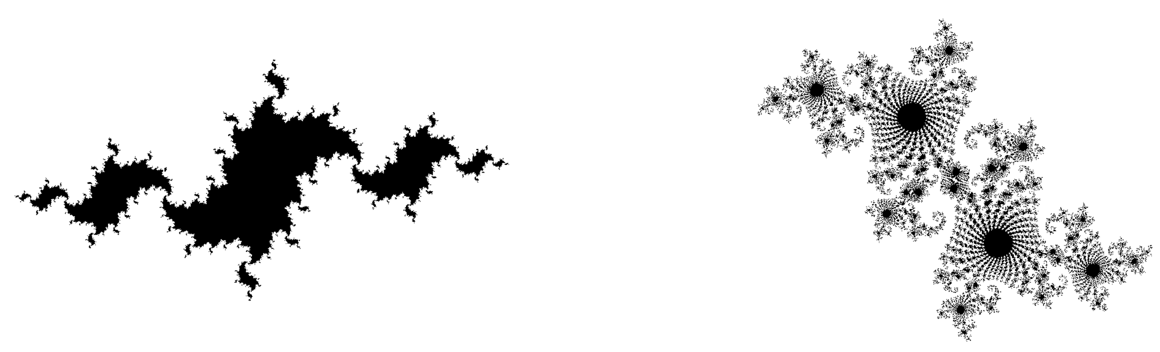
Nosso objetivo é investigar a dinâmica de iterações randômicas de funções racionais na esfera de Riemann, com ênfase em sequências de polinômios.

A esfera de Riemann é, por definição, o plano complexo com o acréscimo de dois pontos. Denotamos assim: $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty, -\infty\}$.

Para estudar os sistemas dinâmicos randômicos, devemos antes entender os determinísticos. Seja f uma função. Definimos a **k-ésima** iteração de f, denotada por f^k, recursivamente por $f^k = f \circ f^{k-1}$, onde $f^1 = f$. Já a órbita de um ponto x sob a função f será a sequência $(x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots)$.

Uma função $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ é dita racional se pode ser expressa na forma $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios.

O conjunto de Julia cheio de uma certa função é o conjunto de todos os pontos cuja órbita sob f é limitada, ou seja, existe pelo menos um valor a partir do qual nenhum número da órbita é maior em módulo. O conjunto de Julia, que denotaremos por $\mathcal{J}_f$, é a fronteira do Julia cheio, e o conjunto de fatou, $\mathcal{F}_f$, é o complementar do conjunto de Julia.



Conjuntos de Julia associados à função $f_c = z^2 + c$, para parâmetros específicos

Uma extensão natural do estudo de sistemas dinâmicos determinísticos é a consideração de sistemas randômicos. Neles, a função varia a cada iteração. Considere a sequência de funções $(f_1, f_2, f_3, \dots)$. A n-ésima iterada da sequência, denotada por F_n, é definida recursivamente: $F_0(z) = z$ e $F_n(z) = (f_n \circ F_{n-1})(z) = f_n(F_{n-1}(z))$, para qualquer n natural.

Os conjuntos de Julia e Fatou são definidos da mesma forma, mudando apenas a forma de denotá-los: $\mathcal{J}_{(f_n)}$ e $\mathcal{F}_{(f_n)}$, respectivamente.

A partir dessa construção, é possível estabelecer resultados profundos sobre a estrutura dos conjuntos $\mathcal{J}_{(f_n)}$ e $\mathcal{F}_{(f_n)}$ e sobre o comportamento assintótico das órbitas, bastando para isso impor restrições adequadas à classe de funções considerada.

Material e Métodos ou Metodologia

A metodologia adotada para alcançar os objetivos propostos será a metodologia própria da pesquisa matemática, que consiste na revisão bibliográfica de artigos e livros relacionados aos problemas propostos no projeto e no desenvolvimento de pesquisa sobre os temas propostos, realizando um estudo comparativo com os trabalhos desenvolvidos por outros autores. A metodologia usada consiste também no uso do método lógico dedutivo para comparar e classificar resultados pertinentes ao assunto estudado.

Apoio Financeiro

CAPES FAPEMIG CNPq

Conclusões

A amplitude da definição de um sistema randômico torna desafiadora a demonstração de resultados de caráter geral. Não obstante, foram obtidos resultados bastante ricos no escopo deste projeto. Tais conquistas, por um lado, contribuem para a compreensão da teoria subjacente à dinâmica polinomial e, por outro, fornecem ferramentas para a modelagem de fenômenos reais. O caos, por ser um conceito abstrato e de análise complexa, mostrou-se, contudo, uma ferramenta eficaz para a geração de números pseudoaleatórios com elevada eficiência. Dessa forma, evidencia-se que o estudo da dinâmica randômica complexa permanece uma área fértil, promissora de descobertas relevantes, tanto no âmbito da matemática pura quanto no da aplicada.

Bibliografia

[1] BRUCK, Rainer; BUGER, Matthias. Generalized Iteration. **Computational Methods and Function Theory**, v. 3, n. 1, p. 201-252, 2003.

[2] BEARDON F. Alana. **Iteration of Rational Functions**. 1st. New York: Springer, 1991.

[3] FORNAESS, John Erik; SIBONY, Nessim. Random iterations of rational functions. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, v. 11, n. 4, p. 687-708, dez. 1991.

[4] BUGER, Matthias. Self-similarity of Julia sets of the composition of polynomials. **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cambridge, v. 17, n. 5, p. 1289-1297, 1997.