Simpósio de Integração Acadêmica
"Das Montanhas de Minas ao Oceano: Os Caminhos da Ciência para um Futuro Sustentável"
SIA UFV 2025

Universidade Federal de Viçosa

Introdução à Dinâmica Complexa Randômica

Samuel de Matos Valério, Alexandre Miranda Alves

ODS 09: Indústria, Inovação e Infraestrutura

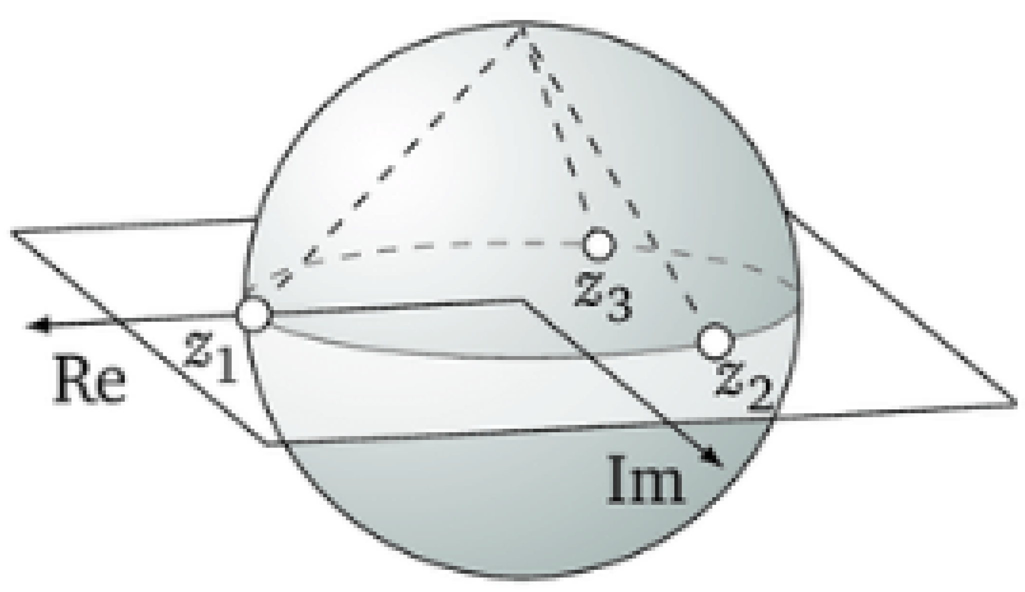
Pesquisa

Introdução

Sistemas Dinâmicos é a área da Matemática que estuda fenômenos que evoluem com o tempo. A teoria apresenta ideias muito abstratas mas ao mesmo tempo muito gerais, o que permite que seus resultados sejam aplicados em várias ciências, como Física, Engenharia, Finanças e Biologia. Neste trabalho, nosso enfoque é em uma classe particular de sistemas dinâmicos, a dos sistemas descritos por sequências de aplicações racionais na Esfera de Riemann, que começou a ser estudada a poucas décadas, mas que já se mostrou bastante prolífica e já possui aplicações em Criptografia.

Objetivos

O objetivo deste trabalho é compreender o comportamento dinâmico de certas sequências de funções racionais complexas. Vamos começar com algumas noções básicas que ilustram a teoria. O espaço natural para o nosso objeto de estudo é o da Esfera de Riemann (ou plano complexo estendido), formada pelo plano complexo $\mathbb{C}$ unido com um ponto no infinito, denotado por ∞, cuja aritmética é a estendida de $\mathbb{C}$. Utilizamos $\overline{\mathbb{C}}$ para denotar a Esfera de Riemann e podemos visualizá-la utilizando a projeção estereográfica de um plano (que identificamos com o plano complexo) sobre uma esfera, conforme a figura.



Um sistema dinâmico randômico em um conjunto X é uma sequência de funções $f_n : X \to X$. Definimos $F_0(x) = x$ e para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_1(x)$$

Podemos interpretar, intuitivamente, o índice n como uma unidade de tempo discreto e o conjunto X como um modelo de um sistema real a ser estudado. Nesse contexto, uma funções f_n pode ser entendida como uma descrição da transformação do sistema no instante n e F_n seria a transformação do sistema entre o instante inicial e o instante n.

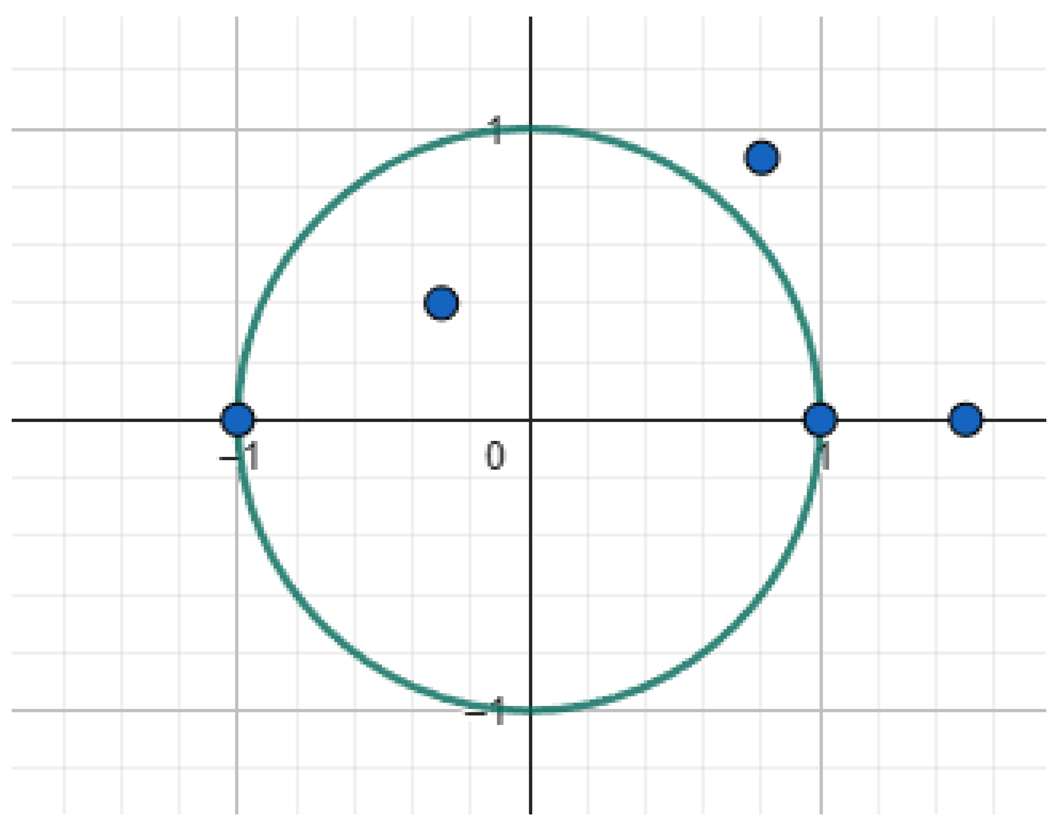
Em nosso estudo, consideramos $X = \overline{\mathbb{C}}$ e as funções f_n são funções racionais de grau maior que ou igual a 2 com coeficientes complexos. Dado um ponto $z \in \overline{\mathbb{C}}$, o conjunto $\{F_n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ é denominado órbita de z e descreve a trajetória do ponto ao longo do tempo. Alguns pontos possuem uma trajetória previsível, enquanto outros possuem uma trajetória errática. O estudo dos pontos "bem comportados"é bastante rico, mas o dos pontos caóticos é consideravelmente mais sofisticado e requer o uso de mais ferramentas teóricas. Consideremos um exemplo bastante simples para ilustrar o problema: a sequência constante

$$f_n(z) = z^2$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(z) = z^{2^n}$$

de modo que, se $|z| < 1$, $F_n(z) \to 0$, e se $|z| > 1$, então $F_n(z) \to \infty$. Como essas órbitas se aproximam de valores fixados, esses pontos possuem trajetórias previsíveis. Por outro lado, quando analizamos os casos em que $|z| = 1$, muitos comportamentos diferentes podem ocorrer. Por exemplo, se $z = 1$, sua órbita é estática: $F_n(1) = 1$ para todo n. Já no caso $z = e^{\frac{p}{q}\pi i}$, as primeiras iterações são diferentes entre si, mas após alguns ciclos a órbita de z atinge o 1 e permanece fixa. Também é possível obter elementos do círculo cujas órbitas nunca se fixam, isto é, cuja órbita possui infinitos pontos diferentes, como $z = e^{\sqrt{2}\pi i}$.



Material e Métodos ou Metodologia

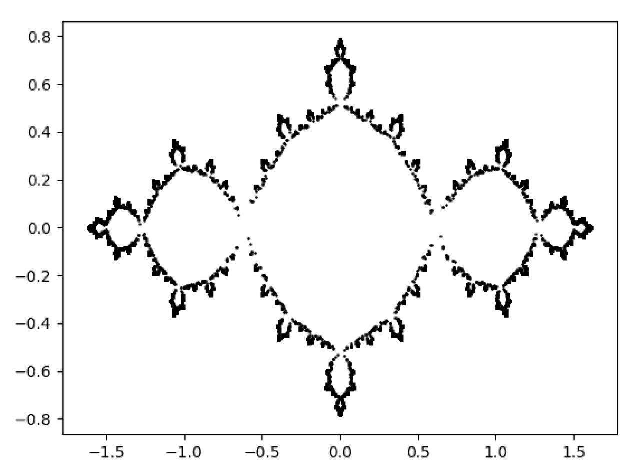
A metodologia adotada para alcançar os objetivos propostos será a metodologia própria da pesquisa matemática, que consiste na revisão bibliográfica de artigos e livros relacionados aos problemas propostos no projeto e no desenvolvimento de pesquisa sobre os temas propostos, realizando um estudo comparativo com os trabalhos desenvolvidos por outros autores. A metodologia usada consiste também no uso do método lógico dedutivo para comparar e classificar resultados pertinentes ao assunto estudado. Também foram realizados encontros semanais com o orientador do projeto, visando revisar conceitos, apresentar o conteúdo e sanar dúvidas.

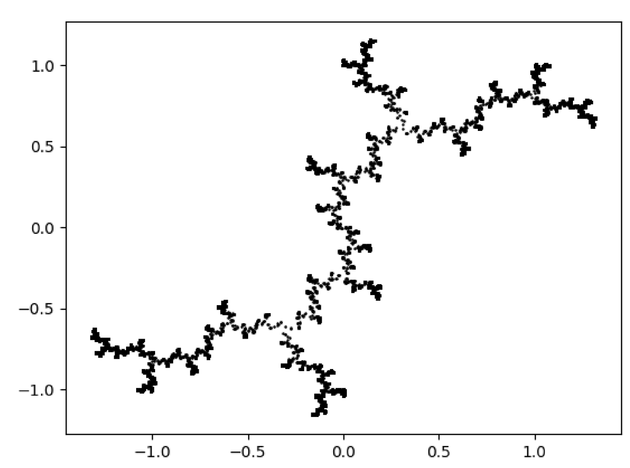
Apoio Financeiro

CAPES FAPEMIG CNPq

Resultados

Dizemos que a sequência de iteradas (F_n) é normal em um ponto $z \in \overline{\mathbb{C}}$ se alguma subsequência (F_{n_k}) converge uniformemente em todos os pontos suficientemente próximos a z. Na prática, se (F_n) é normal em um ponto, todos os pontos próximos a esse ponto possuem trajetórias bem comportadas. Definimos o Conjunto de Fatou, denotado $\mathcal{F}_{(f_n)}$, como o conjunto dos pontos $z \in \overline{\mathbb{C}}$ tais que (F_n) é normal em z. Denominamos Conjunto de Julia, denotado $\mathcal{J}_{(f_n)}$, o complementar do Conjunto de Fatou. No exemplo da função quadrática, $\mathcal{J}_{(z^2)} = S^1$, o círculo de centro 0 e raio 1. Utilizando ferramentas da Análise Complexa, Topologia, Teoria da Medida e Geometria Fractal, conseguimos obter resultados que nos garantem equivalências entre as propriedades dinâmicas do sistema e as propriedades geométricas de seus Conjuntos de Fatou e Julia. Conseguimos, por exemplo, verificar que fazendo restrições nas escolhas dos parâmetros da sequência de funções, o Conjunto de Julia torna-se estável, o que permitiu utilizar, de maneira segura, o sistema dinâmico para gerar cifras criptográficas bastante sofisticadas. Uma família de sistemas dinâmicos que oferece interessantes exemplos de Conjuntos de Fatou e Julia é a família dada por $f_n(z) = z^2 + c$, onde $c \in \mathbb{C}$ é fixado. Dependendo da escolha do parâmetro, a geometria do Conjunto de Julia pode variar, conforme os exemplos abaixo:





Conclusões

A amplitude da definição de sistema randômico torna difícil a demonstração de resultados gerais. Ainda assim, obtivemos resultados muito ricos dentro do escopo do nosso projeto, que por um lado nos ajuda a compreender a teoria por trás da dinâmica polinomial enquanto por outro nos dá ferramentas para modelar fenômenos reais. O caos é um conceito abstrato e muito complexo de ser estudado, mas conseguimos utilizá-lo para obter números pseudoaleatórios de maneira bastante eficiente. Isso nos mostra que o estudo da dinâmica randômica complexa ainda pode nos fornecer muitos resultados importantes, sejam no âmbito da matemática pura ou no da aplicada.

Bibliografia

[1] Alan F. Beardon. "Iteration of Rational Functions: Complex Analytic Dynamical Systems". Em: (2000).
[2] Matthias Bruck Rainer e Buger. "Generalized Iteration". Em: (2004).
[3] Nessim Fornaess John E. e Sibony. "Random Iterations of Rational Functions". Em: (1991).
[4] T. W. Gamelin. "Complex Analysis". Em: (2001).
[5] John Milnor. "Dynamics in One Complex Variable". Em: (2006).

[1, 2, 3, 4, 5]