Simpósio de Integração Acadêmica
"Das Montanhas de Minas ao Oceano: Os Caminhos da Ciência para um Futuro Sustentável"
SIA UFV 2025

UFV Universidade Federal de Viçosa

Uma generalização da constante de Davenport com peso

Pedro Augusto Costa pedro.costa3@ufv.br
Abílio Lemos Cardoso Júnior abiliolemos@ufv.br

Educação de Qualidade | Categoria 4

Introdução

A Constante de Davenport, $D(G)$, é um dos invariantes mais estudados em teoria aditiva dos números. Generalizações recentes introduziram um conjunto de pesos A para a soma, a constante $D_A(G)$, e um conjunto alvo $B \subseteq G$, a constante $D(G, B)$.
Este trabalho introduz a constante $D_A(G, B)$, que unifica estas ideias, e foca na sua investigação no grupo $G = \mathbb{Z}_p$, onde p é um número primo. Nosso objetivo é determinar o valor desta constante e classificar as sequências extremas.

Objetivos

- Definir e estabelecer a existência da constante $D_A(G, B)$.
- Calcular o valor exato de $D_A(\mathbb{Z}_p, B) = D_A(p, B)$ para os conjuntos de pesos $A = U(p)$, $A = U(p)^2$ e $A = U(p)^3$, onde $U(p)$ é o grupo das unidades.
- Fornecer condições necessárias e suficientes sobre a estrutura do conjunto alvo B para que a constante atinja seus limitantes.
- Classificar todas as sequências extremas associadas a $D_A(p, B)$.

Materiais e Métodos ou Metodologia

A metodologia utilizada neste trabalho é a pesquisa teórico-analítica com abordagem qualitativa. O desenvolvimento foi realizado por meio de revisões bibliográficas da literatura pertinente, demonstrações de resultados originais e discussões semanais entre o orientador e o discente para validação dos argumentos e planejamento dos próximos passos.

Resultados e/ou Ações Desenvolvidas

Esta pesquisa focou em determinar o valor exato da constante $D_A(p, B)$ e em classificar as sequências extremas associadas, para os casos em que o conjunto de pesos A é o grupo de unidades $U(p)$ ou seus subgrupos de quadrados e cubos. O comportamento da constante é totalmente determinado pelo comportamento do conjunto alvo B.

Proposição 1. Seja p um número primo e $B \subseteq \mathbb{Z}_p$ tal que $0 \in B$. Então, $D_{U(p)}(p, B) = 2$ se, e somente se, $B = \{0\}$. Consequentemente, se $|B| \geq 2$, temos $D_{U(p)}(p, B) = 1$.

Para $p \geq 3$, o valor da constante depende de como as duas classes laterais de $U(p)^2$ se relacionam com B.

Lema 2. Se $|B| \geq 2$, então $D_{U(p)^2}(p, B) \leq 2$. Por outro lado, a constante atinge seu valor máximo, $D_{U(p)^2}(p, B) = 3$, se, e somente se, $B = \{0\}$.

O resultado principal para este caso caracteriza exatamente quando a constante é igual a 2.

Teorema 3. Sejam $p \geq 3$ um primo e $|B| \geq 2$. Então, $D_{U(p)^2}(p, B) = 2$ se, e somente se, existe uma única classe lateral $xU(p)^2$ em $U(p)$ que é disjunta de B.

Disso, concluímos que uma sequência $S = (x)$ é uma sequência extrema se, e somente se, $xU(p)^2$ é a única classe lateral disjunta de B.

Agora para o caso do conjunto de pesos sendo os cubos, se $p \not\equiv 1 \pmod 3$, o caso é análogo ao das unidades. Se $p \equiv 1 \pmod 3$, temos:

Lema 4. Se $p \equiv 1 \pmod 3$ e $|B| \geq 2$, então $D_{U(p)^3}(p, B) \leq 2$. A constante atinge seu valor máximo, $D_{U(p)^3}(p, B) = 3$, se, e somente se, $B = \{0\}$.

Teorema 5. Sejam $p \equiv 1 \pmod 3$ um primo e $|B| \geq 2$. Então, $D_{U(p)^3}(p, B) = 2$ se, e somente se, existe pelo menos uma e no máximo duas classes de $U(p)^3$ em $U(p)$ que são disjuntas de B.

A classificação das sequências extremas segue diretamente deste teorema.

Conclusões

Este trabalho estabeleceu os valores exatos da constante $D_A(p, B)$ para os conjuntos de pesos $A = U(p)^k$ com $k = 1, 2, 3$, e caracterizou as sequências extremas associadas. Os resultados mostram uma forte dependência entre o valor da constante e a estrutura das classes laterais do conjunto de pesos.
A determinação de resultados análogos para o anel $\mathbb{Z}_n$ com n composto permanece como um problema em aberto de grande interesse e um caminho natural para a continuação desta pesquisa.

Bibliografia

- Godinho, H., Lemos, A., & Neumann, V. G. L. (preprint). *A generalization of the Davenport constant over abelian groups*
- Griffiths, S. (2008). *The Erdős–Ginzburg–Ziv theorem with units.* Discrete Mathematics.
- Mondal, S., Paul, K., & Paul, S. (2022). *Extremal sequences for a weighted zero-sum constant.* Integers.
- Mondal, S., Paul, K., & Paul, S. (2023). *On a different weighted zero-sum constant.* Discrete Math.

Apoio financeiro

FAPEMIG CNPq