Simpósio de Integração Acadêmica

UFV Universidade Federal de Viçosa

Construção da Máquina de Turing Estendida

Phellype Xavier de Oliveira[1], Pouya Mehdipour[2]

Universidade Federal de Viçosa, MG, Brasil

phellype.oliveira@ufv.br[1], pouya@ufv.br[2]

Resumo

Neste projeto, estudamos a Máquina de Turing como um sistema dinâmico, com o objetivo de estender a sua definição para o espaço *zip shift*.

Palavras-Chave: Dinâmica Topológica; Espaço *Zip Shift*.

Introdução

O estudo das Máquinas de Turing sob a perspectiva da *dinâmica topológica* e da *dinâmica simbólica* oferece uma ferramenta teórica útil para a compreensão da complexidade computacional e da dinâmica de sistemas discretos. A codificação das configurações de uma Máquina de Turing em espaços simbólicos – tipicamente como pontos em um espaço métrico compacto – possibilita analisar o comportamento global da máquina como um sistema dinâmico. Nesse contexto, a Máquina de Turing induz uma transformação, cujas propriedades dinâmicas (como expansividade, recorrência, sensibilidade a condição inicial e entropia) refletem as características da lógica computacional da máquina.

Fundamentação Teórica

Definição 1. Um **sistema dinâmico** é uma função $f : X \to X$ no mínimo contínua definida em um espaço métrico (compacto).

Definição 2 ([2])**.** Um sistema dinâmico $f : X \to X$ é dito **localmente bijetivo** se, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U de x na qual f é bijetiva.

Definição 3 ([2])**.** Um sistema dinâmico é dito **finito-por-1** se existe $k > 0$ tal que, para todo x, $\#(f^{-1}(x)) \leq k$, onde $\#$ representa a cardinalidade desse conjunto.

Exemplo 1 ([3])**.** Sejam Z e S dois conjuntos finitos de símbolos, com $\#Z \leq \#S$, e considere uma função sobrejetora $\tau : S \to Z$. Defina o espaço *zip shift* como $\Sigma := Z^{\mathbb{Z}^-} \times S^{\mathbb{Z}^+}$, e considere a aplicação $\sigma_\tau : \Sigma \to \Sigma$ definida por

$$[\sigma_\tau(x)]_i = \begin{cases} x_{i+1}, & \text{se } i \neq -1, \\ \tau(x_0), & \text{se } i = -1. \end{cases}$$

A aplicação σ_τ define um sistema dinâmico finito-por-1, denominado ***zip shift***.

Para definirmos uma Máquina de Turing com fita móvel (MTT), consideramos um conjunto finito Q, não vazio, de estados internos e um conjunto A, também finito, de símbolos com pelo menos dois elementos, de modo que $Q \cap A = \emptyset$.

Definição 4 ([2])**.** Seja $\delta : Q \times A \to Q \times A \times \{-1, 0, 1\}$ uma função de transição. Uma MTT é um sistema dinâmico $f : X \to X$ onde $X = Q \times A^{\mathbb{Z}}$ e f é definida como

$$f(x)_q = \delta_Q \pi(x)$$

$$f(x)_i = \begin{cases} \delta_A \pi(x) & \text{se } \; i = -\delta_Z \pi(x) \\ x_{i+\delta_Z \pi(x)} & \text{se } \; i \neq -\delta_Z \pi(x) \end{cases}$$

com $x = (x_q, (x_n)_{n \in \mathbb{Z}})$ e a projeção $\pi \colon X \to Q \times A$ definida como $\pi(x) = (x_q, x_0)$.

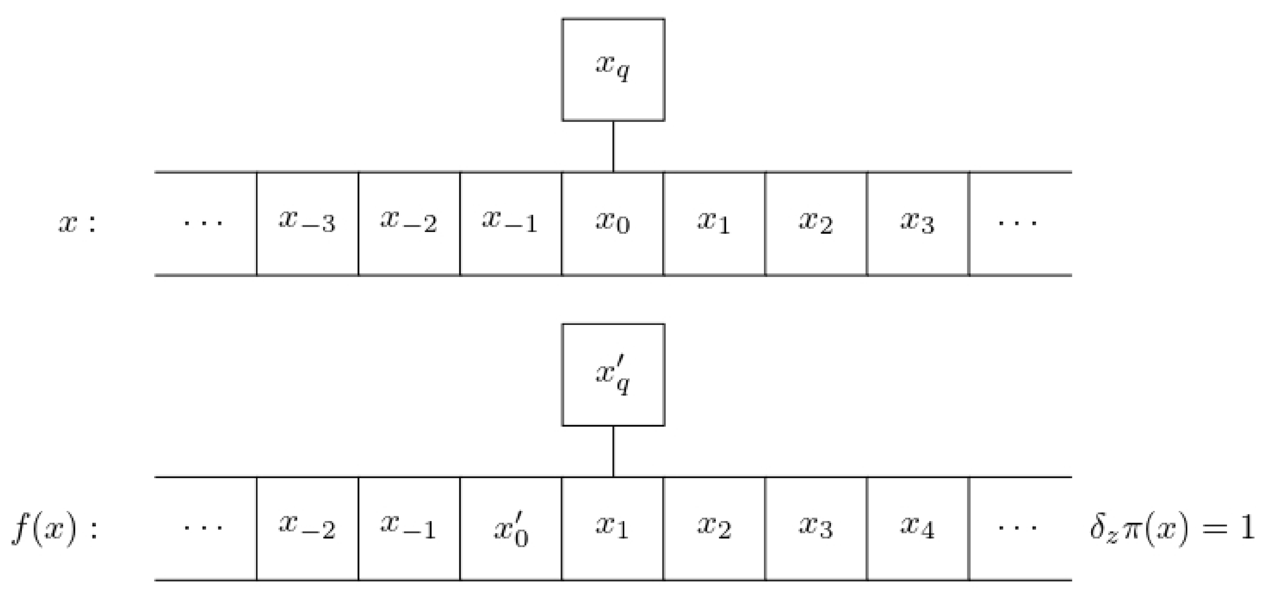

Figura 1: Máquina de Turing. Fonte: Adaptada de [2].

Proposição 1 ([2])**.** Toda MTT é localmente bijetiva e finita-por-1.

Teorema 1 ([2])**.** Toda MTT expansiva é topologicamente conjugada com um SFT.

Resultados

Definição 5. Para definirmos uma Máquina de Turing Estendida, precisamos de algumas definições:

1. Definimos $X = Q_Z \times Q_S \times \Sigma_{Z,S}$;
2. Consideraremos Z, S os conjuntos dos símbolos que serão impressos na fita e Q_Z, Q_S os conjuntos dos estados internos. Conjuntos esses que satisfazem $(Z \cup S) \cap (Q_Z \cup Q_S) = \emptyset$ e $\#Z \leq \#S$;
3. Definimos a função de transição $\delta : \langle \delta_{Q_Z}, \delta_{Q_S}, \delta_Z, \delta_S, \delta_D \rangle : Q_Z \times Q_S \times Z \times S \to Q_Z \times Q_S \times Z \times S \times \{-1, 0, 1\}$ e a função de tradução $\delta_T : Q_Z \times Z \to S$;
4. Definimos a projeção $\pi : X \to Q_Z \times Q_S \times Z \times S$ como $\pi(x) = (x_{q_z}, x_{q_s}, x_{-1}, x_0)$.

Definição 6 (Máquina de Turing Estendida)**.**

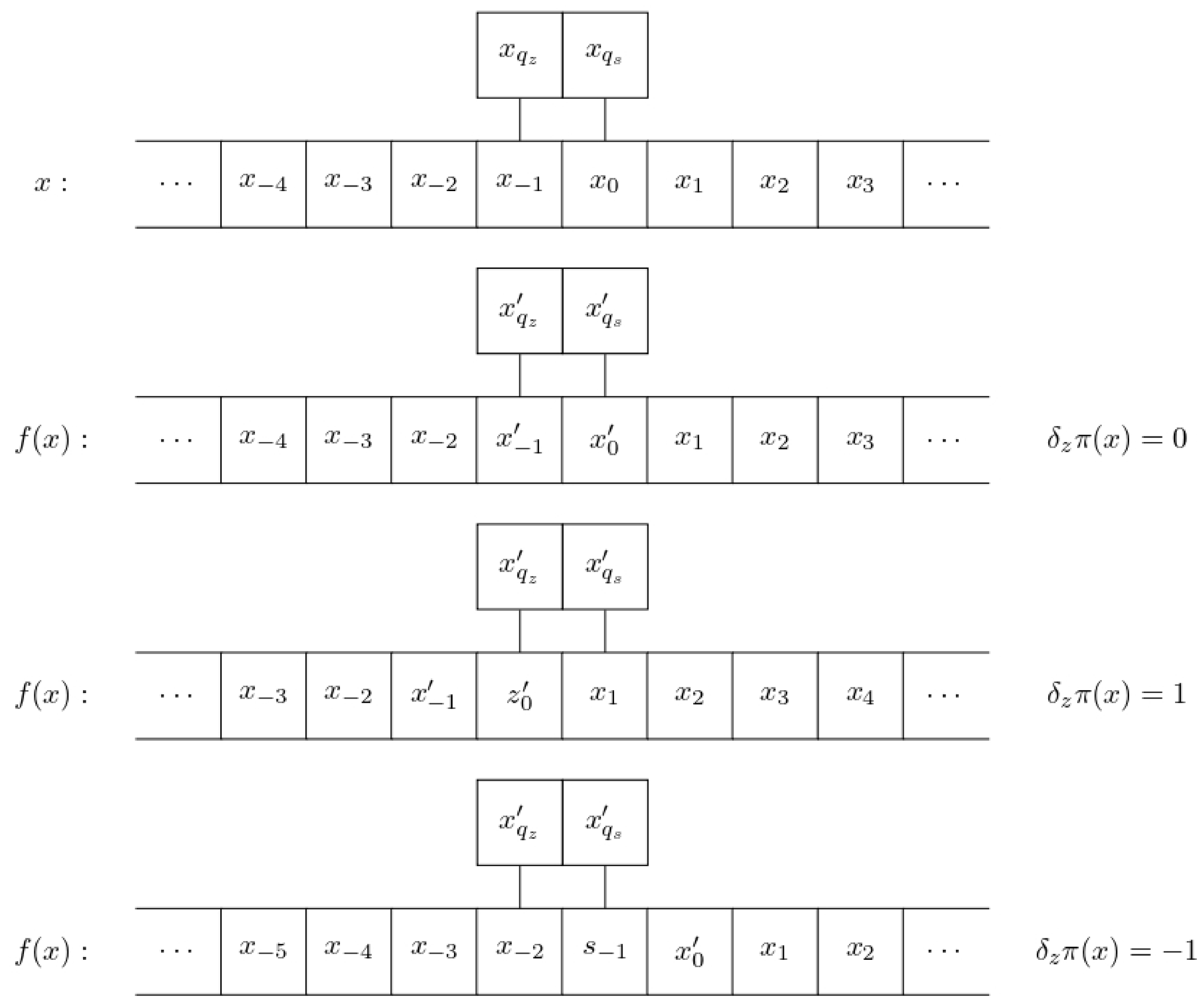

Figura 2: Máquina de Turing Estendida. Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 2. Toda Máquina de Turing Estendida construída em um espaço zip shift é localmente bijetiva e finita-por-1.

Uma vez construída a Máquina de Turing Estendida, objetivamos mostrar que, se essa dinâmica for S-expansiva, então ela é conjugada topologicamente com um *zip shift* do tipo finito.

Referências

[1] A. T. Baraviera e F. M. Branco. *Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão*. Online. Acessado em 19/01/2025, https://www.emis.de/journals/em/docs/coloquios/SU-2.02.pdf.

[2] P. Kůrka. "On topological dynamics of Turing machines". Em: *Theoretical Computer Science* 174 (1997), pp. 203–216. DOI: 10.1016/s0304-3975(96)00025-4.

[3] S. Lamei e P. Mehdipour. "Zip Shift Space". Em: *arXiv preprint arXiv:2502.11272* (2025). URL: https://arxiv.org/abs/2502.11272.

[4] L. M. Pereira et al. *Alan Turing: cientista universal*. Ciência e Cultura para Todos. UMinho Editora, 2019. ISBN: 978-989-8974-03-7.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pelo apoio financeiro ao projeto.