Simpósio de Integração Acadêmica

“Das Montanhas de Minas ao Oceano: Os Caminhos da Ciência para um Futuro Sustentável”

SIA UFV 2025

Posets Hierárquicos Aplicados à Teoria de Códigos

Deivid Toledo da Cruz / Universidade Federal de Viçosa / deivid.cruz@ufv.br
Allan de Oliveira Moura / Universidade Federal de Viçosa / allan.moura@ufv.br

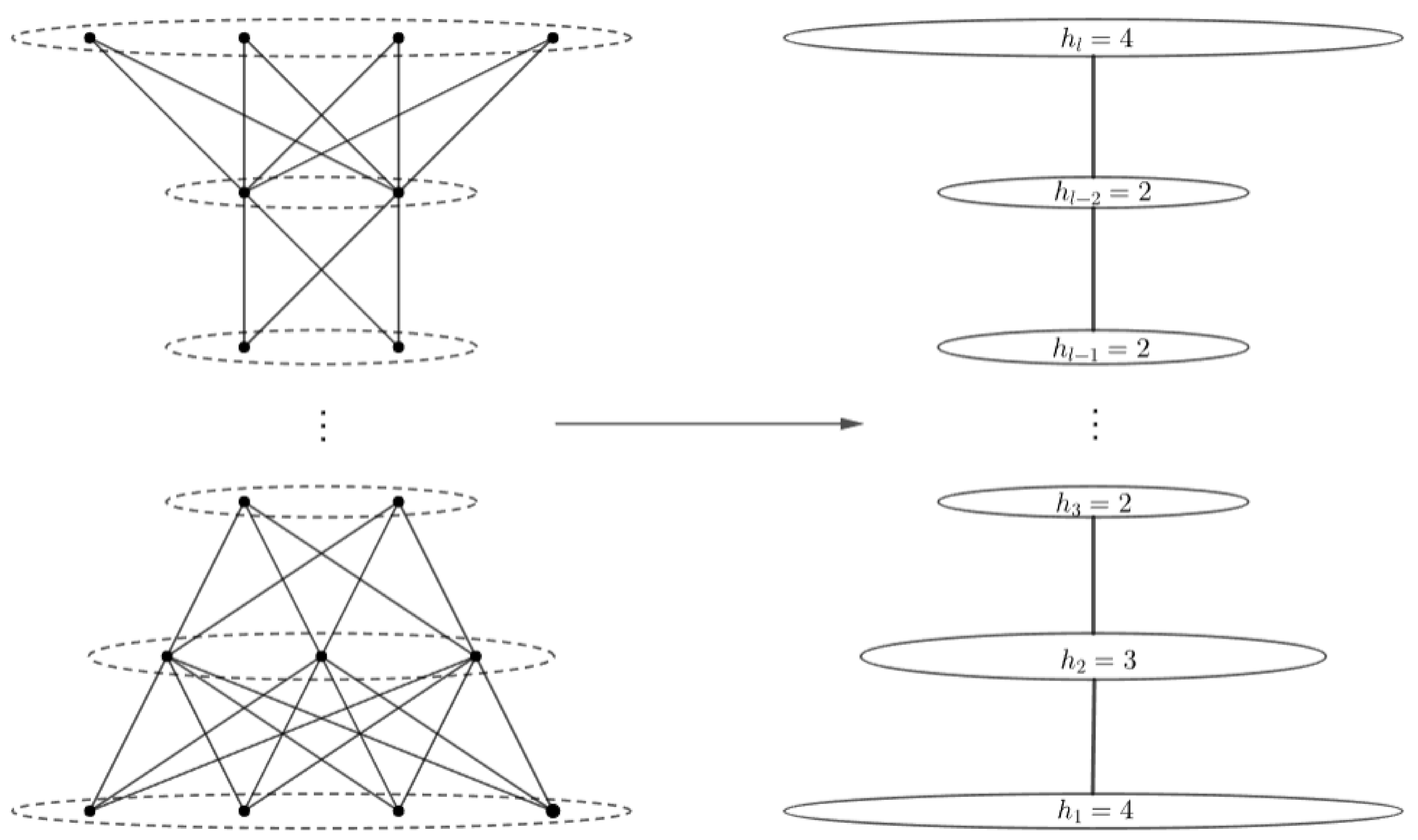
Dimensões Sociais: ODS4

Categoria: Pesquisa

Introdução

Os conjuntos parcialmente ordenados, ou simplesmente posets são definidos pelo par $P = (X, \preceq_P)$, em que X representa um conjunto não vazio e $\preceq$ corresponde a uma ordem parcial sobre X. Define-se $H = (H_1, ..., H_l)$ e $h = (h_1, ..., h_l)$ como o **espectro hierárquico** e o **vetor hierárquico**, respectivamente, com $n = h_1 + h_2 + \cdots + h_l$. Um poset hierárquico (também conhecido como weak order) com espectro hierárquico H é o poset $P = ([n], \preceq_P)$, onde

$$a \preceq_P b \iff a \in H_i, b \in H_j \text{ e } i < j.$$



Neste trabalho, pesquisamos a métrica definida por um poset hierárquico e, a partir dela, determinamos as principais parâmetros de um código. Em seguida, analisamos as relações entre essas configurações, estabelecendo condições aplicáveis e suficientes para que um código seja considerado perfeito. Também discutimos propriedades particulares de códigos definidos sobre métricas hierárquicas, destacando suas especificidades. Por fim, mostramos como a composição canônica de um código contribui para simplificar o processo de decodificação por síndrome.

Objetivos

As ordens hierárquicas têm um papel especial quando pensamos em métricas básicas em posets, pois muitas propriedades da métrica de Hamming também valem para os posets hierárquicos. No caso dos códigos em posets, a distância mínima determina o raio de empacotamento se, e somente se, o poset para hierárquico.

As análises definidas por esses posets formam a única família bem compreendida até agora, a ponto de poder afirmamos que são tão bem compreendidas quanto à métrica de Hamming. Nosso objetivo é explicar como essas métricas funcionam

Material e Métodos ou Metodologia

Foram dedicadas 16 horas semanais para desenvolver estudos dos temas relacionados no projeto, utilizando a bibliografia citada, e para apresentar seminários (4 horas semanais) a respeito de tópicos selecionados pelo orientador. Além disso, foram criados programas em Python que auxiliaram na construção e determinação de parâmetros de códigos.

Apoio Financeiro

CAPES FAPEMIG CNPq

Resultados

A partir da pesquisa realizada observou-se as seguintes relações do código na métrica hierárquica:

1. O peso mínimo é dado por:

$$\delta_{d_{P_H}}(C) = s_{t_1 - 1} + \delta_{t_1}(C_{t_1})$$

2. O raio de empacotamento é dado por:

$$R_{d_{P_H}}(C) = s_{t_1 - 1} + \left\lfloor \frac{\delta_{t_1}(C_{t_1}) - 1}{2} \right\rfloor$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x.

3. O raio de cobertura é:

$$R_{\text{cov}, d_{P_H}}(C) = R_{\text{cov}, d_H}(C_r) + \sum_{i=1}^{r} h_i$$

onde $r = \min\{i \in [l-1]; C_j = \mathbb{F}_q^{h_j}, \forall j > i\}$ se $C_l = \mathbb{F}_q^{h_l}$ ou $r = l$ se $C_l \neq \mathbb{F}_q^{h_l}$, e $R_{\text{cov}, d_H}(C_r)$ é o raio de cobertura de C_r considerado como um código no espaço de Hamming $\mathbb{F}_q^{h_r}$.

Um código C é d_P**-perfeito** se, e somente se, $C = C_{t_1} \oplus V_{t_1+1} \oplus \cdots \oplus V_h$ e C_{t_1} é um código perfeito em V_{t_1} com a métrica de Hamming, onde $V_i = \{x \in F_q^n; \text{supp}(x) \subseteq H_i\}$.

Outro resultado importante é que um poset é hierárquico se, e somente se, admitir decomposição canônica, identidade de MacWilliams, satisfazer a propriedade da extensão de MacWilliams, seu grupo agir transitivamente em esferas de raio fixo, ou sua distância mínima determinar o raio de empacotamento.

Por fim, para a realização da decodificação por síndromes, ao receber uma mensagem y, calcula-se a síndrome $s(y) = Hy^T$, a qual é utilizada para a busca na tabela correspondente a todas as síndromes possíveis.

No contexto de um poset hierárquico P com l níveis, considera-se a decomposição canônica

$$T(C) = C = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_l.$$

Dado $y \in F_q^n$, admite-se a decomposição $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_l$, onde $\text{supp}(y_i) \subseteq H_i$, com H_i representando o i-ésimo nível do poset. Cada componente $C_i \subseteq F_q^{h_i}$ pode ser tratado como um código em um subespaço dotado da métrica de Hamming d_H. Nessas condições, se

$$c_i \in \arg\min_{c \in C_i} d_H(y_i, c),$$

então vale que

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_l \in \arg\min_{c \in C} d_P(y, c).$$

Conclui-se, portanto, que a decodificação por síndromes pode ser realizada de forma independente para cada componente y_i em relação ao respectivo código C_i.

Conclusões

Um código C pode ser decomposto em subespaços encaixados refletindo a hierarquia imposta pelo poset P. O peso mínimo, o raio de empacotamento e o raio de cobertura podem ser determinados em termos de subespaços, conectando a estrutura do código à métrica hierárquica.

A perfeição de um código na métrica é caracterizada por uma decomposição específica $C = C_{t_1} \oplus V_{t_1+1} \oplus \cdots \oplus V_h$, onde o primeiro deles é um código perfeito na métrica de Hamming usual. Isso estabelece um critério direto para verificar a perfeição de códigos.

Essas conclusões mostram como a estrutura hierárquica do poset influencia a teoria dos códigos, fornecendo uma abordagem sistemática para estudar códigos em espaços parcialmente ordenados.

Bibliografia

[1] FELIX, L.; FIRER, M. Canonical-systematic form for codes in hierarchical metrics. **Advances in Mathematics of Communications**, v. 6, n. 3, p. 315–328, 2012.

[2] FIRER, M.; ALVES, M. M. S.; PINHEIRO, J. A.; PANEK, L. **Poset Codes: Partial Orders, Metrics and Coding Theory**. Cham: Springer, 2018.

[3] MACHADO, R.; PINHEIRO, J.; FIRER, M. Characterization of metrics induced by hierarchical posets. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 63, n. 6, p. 3630–3640, 2017.

[4] OH, D. Poset metrics admitting association schemes and a new proof of MacWilliams identity. **Journal of the Korean Mathematical Society**, v. 50, n. 5, p. 917–931, 2013