Simpósio de Integração Acadêmica
"Ciências Básicas para o Desenvolvimento Sustentável"
SIA UFV 2023

UFV
Universidade Federal de Viçosa

Um estudo sobre operadores lineares e suas aplicações

Jacqueline Barros do Nascimento

Operador Linear, Produto Interno, Espaços Vetoriais

Introdução

Nesse trabalho temos por objetivo fazer uma revisão bibliográfica dos principais referenciais teóricos da área de álgebra linear, compreender os conceitos preliminares de espaços vetoriais e transformações lineares, base e dimensão de um espaço, alguns exemplos de espaços com dimensão finita e infinita, representação de uma transformação por uma matriz, bem como os principais teoremas da área, como Teorema do núcleo e da imagem, método para completamento de base, dentre outros. O estudo de operadores lineares também é de interesse nesse trabalho. Dito isso, temos:

Definição: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de V em W, $F : V \rightarrow W$, que satisfaz as seguintes condições:

i) Quaisquer que sejam u e v em V,

$$F(u+v) = F(u) + F(v)$$

ii) Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$,

$$F(kv) = kF(v)$$

Objetivos

Realizar uma revisão bibliográfica dos principais referenciais teóricos da área de álgebra linear, compreender os conceitos preliminares de espaços vetoriais e transformações lineares, base e dimensão de um espaço, alguns exemplos de espaços com dimensão finita e infinita, representação de uma transformação por uma matriz, bem como os principais teoremas da área, como Teorema do núcleo e da imagem, método para completamento de base, dentre outros.

Material e Método

Um fato importante sobre aplicações lineares é que elas são perfeitamente determinadas conhecendo-se apenas seu valor nos elementos de uma base.

Teorema: Dados dois espaços vetoriais reais V e W e uma base de V, $\{v_1, ..., v_n\}$, sejam $w_1, ..., w_n$ elementos arbitrários de W. Então existe uma única aplicação linear $T : V \rightarrow W$ tal que $T(v_1) = w_1, ..., T(v_n) = w_n$.

Essa aplicação é dada por:
se $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$,

$$T(v) = a_1T(v_1) + ... + a_nT(v_n) = a_1w_1 + ... + a_nw_n$$

Definição: Seja $T : V \rightarrow W$ uma aplicação linear. A imagem de T é o conjunto dos vetores $v \in V$, que satisfaz $T(v) = w$. Ou seja

$$Im(T) = w \in W; T(v) = w \text{ para algum } v \in V$$

Definição: Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. O conjunto os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$ é chamado núcleo de T, sendo denotado por $ker(T)$. Isto é

$$ker(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}$$

Observe que $ker(T) \subset V$ é um subconjunto de V e, ainda mais, é um subespaço vetorial de V.

Resultados e Discussão

Seja a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ dada por } T(x,y,z) = (x, 2y, 0).$$

Então a imagem de T

$$\begin{aligned} Im\ (T) &= \{(x, 2y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,0) + y(0,2,0) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= (1,0,0), (0,2,0) \end{aligned}$$

Observe que $dim\ (T) = 2$.
O núcleo de T é dado por:

$$\begin{aligned} ker\ (T) &= \{(x,y,z) : T(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) : (x,2y,0) = (0,0,0)\} \\ &= \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(0,0,1) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= [(0,0,1)] \end{aligned}$$

Observe que $dim\ ker\ (T) = 1$.

Conclusões

A prática do estudo para elaboração do trabalho apresentado permitiu compreender a aplicabilidade a Álgebra Linear, no qual baseou-se em um estudo teórico seguido pela exploração de exemplos algébricos práticos. No entanto, tal conhecimento não se limitou à teoria, podendo ser citada a grande importância do emprego da Álgebra Linear para o desenvolvimento da informática. Buscou-se abordar os conceitos de espaços vetoriais, transformações lineares, base e dimensão de um espaço, alguns exemplos de espaços com dimensão finita e infinita, representação de uma transformação por uma matriz, bem como os principais teoremas da área, como Teorema do núcleo e da imagem, método para completamento de base, dentre outros.

Bibliografia

Boldrini, José Luiz, Álgebra Linear 3. ed. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.

Agradecimentos

Agradeço à disponibilidade e atenção do orientador Vagner Rodrigues Bessa.

Apoio financeiro

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.