Simpósio de Integração Acadêmica

“Ciências Básicas para o Desenvolvimento Sustentável”

SIA UFV 2023

Tópicos de topologia algébrica

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA - CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Paula Cupertino C. Ribeiro (paula.cupertino@.ufv.br) - Sônia Maria Fernandes (somari@.ufv.br)

Área temática: Álgebra - Grande área: Ciências exatas e tecnológicas - Categoria: Pesquisa.

Palavras-chave: Grupo fundamental, Homologia, Homotopia.

1. Introdução

A incorporação da álgebra à topologia deu origem a um novo ramo da matemática, denominado topologia algébrica, onde é possível descrever a estrutura de um espaço topológico associando-o com um sistema algébrico, normalmente um grupo ou uma sequência de grupos. Nesse trabalho faremos um estudo de alguns conceitos relevantes nesta área, dentre eles: a teoria de homologia simplicial, que estuda os espaços topológicos cujos componentes estruturais são n-simplexos, e a ideia de homotopia cujo invariante algébrico mais simples associado a ela é, provavelmente, o grupo fundamental.

2. Objetivos

O objetivo deste trabalho é apresentar a teoria de homologia simplicial e o grupo fundamental a fim de proporcionar uma visão ampla destas teorias. Como exemplo vamos exibir os grupos de homologia simplicial do plano projetivo. Além disso, será apresentado o Teorema de Hurewicz, resultado que conecta o os dois conceitos citados.

3. Metodologia

A metodologia utilizada consistiu no estudo de livros e artigos relacionados ao tema apontado pela orientadora. Foram dedicadas 20 horas semanais para desenvolver estudo dos tópicos propostos, sendo 2 destas horas usadas para discussões com a orientadora.

4. Resultados e discussão

Homologia Simplicial

Primeiramente, vamos definir conceitos que auxiliarão no estudo de espaços topológicos formados por n-simplexos.

Definição 1 *Um conjunto $A = \{a_0, a_1, ..., a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ de $k+1$ pontos é **geometricamente independente** (g.i.) se os vetores $a_1 - a_0, a_2 - a_0, ..., a_k - a_0$ são linearmente independentes. Se $A = \{a_0, a_1, ..., a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto de pontos g.i., o **k-simplexo** gerado por A, denotado por σ^k, é o menor conjunto convexo que contém A. Os elementos de A são chamados **vértices** do k-simplexo.*

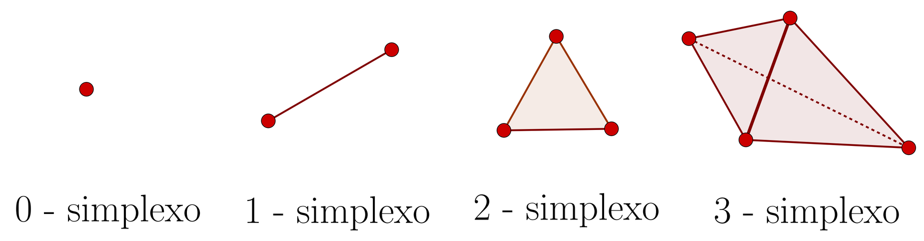

Figura 1: Simplexos

Definição 2 *Um simplexo σ^k é uma **face** de um simplexo σ^n, $k \leq n$, se cada vértice de σ^k é um vértice de σ^n. Se σ^n tem vértices $a_0, a_1, ..., a_n$, então denotamos $\sigma^n = \langle a_0 a_1 ... a_n \rangle$.*

Definição 3 *Dois simplexos σ^m e σ^n são **propriamente unidos** se $\sigma^m \cap \sigma^n = \emptyset$ ou $\sigma^m \cap \sigma^n$ é uma face de ambos.*

Definição 4
1. *Um **complexo simplicial** é uma família finita K de simplexos propriamente unidos tais que cada face de um elemento de K é um elemento de K.*
2. *A **dimensão de** K é o maior índice positivo r tal que K tenha um r-simplexo.*
3. *A união de elementos de K com a topologia do espaço euclidiano é denotado por $|K|$ e é chamado de **poliedro** associado a K.*

Definição 5 *A **triangularização** de um espaço topológico X consiste num complexo simplicial K e um homeomorfismo $h : |K| \to X$.*

Geometricamente, triangularizar uma superfície é cobri-la de formas triangulares, as quais ou tem uma face em comum, ou um vértice, ou uma aresta. Além disso, a triangularização de uma superfície não é única.

Definição 6 *Um **n-simplexo orientado**, $n \geq 1$, é obtido de um n-simplexo $\sigma^n = \langle a_0 ... a_n \rangle$ escolhendo a ordem para esses vértices. A classe equivalente de permutações pares para escolha da ordem, determina o simplexo orientado positivamente $+\sigma^n$, enquanto a classe equivalente de permutações ímpares determina o simplexo orientado negativamente $-\sigma^n$. Um **complexo simplicial orientado** é obtido de um complexo simplicial atribuindo uma orientação para cada simplexo. Por convenção, consideramos o 0-simplexo $\langle a_0 \rangle$ como orientado positivamente.*

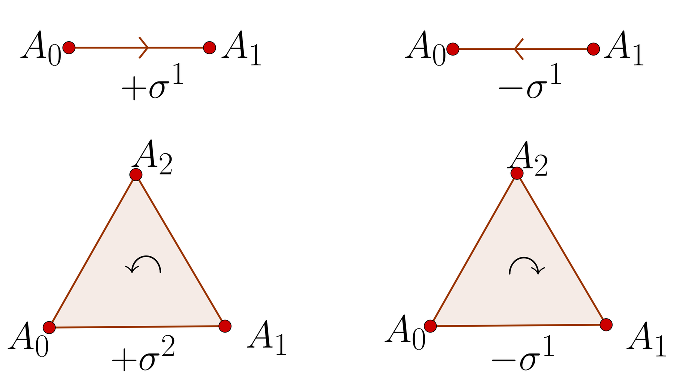

Figura 2: Orientação de simplexos.

Definição 7 *Seja K um complexo orientado e $\sigma^{p+1}, \sigma^p \in K$ simplexos cujas dimensões diferem por 1. Associamos ao par (σ^{p+1}, σ^p) um **número de incidência** $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$ definido como: $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$ se σ^p não é uma face de σ^{p+1}. Caso contrário, i.e, se σ^p é face de σ^{p+1}, ordene os vértices $a_0, ..., a_p$ de σ^p de modo que $+\sigma^p = +\langle a_0 ... a_p \rangle$. Seja v o vértice de σ^{p+1} que não é vértice de σ^p. Então $+\sigma^{p+1} = \pm\langle v a_0 ... a_p \rangle$ e temos $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 1$ se $+\sigma^{p+1} = +\langle v a_0 ... a_p \rangle$ e $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = -1$ se $+\sigma^{p+1} = -\langle v a_0 ... a_p \rangle$.*

Definição 8 *Seja K um complexo orientado. Fixado um inteiro positivo p, denotamos os simplexos p-dimensionais de K por $\sigma_1^p, \sigma_2^p, ..., \sigma_n^p$, assumimos que é dada uma orientação para cada um deles e utilizamos a notação $-\sigma_i^p$ para indicar que foi tomada a orientação contrária de σ_i^p. Seja $C_p(K)$ o conjunto das combinações lineares formais $a_1\sigma_1^p + ... + a_n\sigma_n^p$ com $a_i \in \mathbb{Z}$. Um elemento $c \in C_p(K)$ é chamado **p-cadeia**, quando particularmente temos $c = a\sigma^p$ dizemos que c é uma **p-cadeia elementar**. Definindo em $C_p(K)$ a operação de adição*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\sigma_i^p + \sum_{i=0}^{n} b_i\sigma_i^p = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)\sigma_i^p \quad , \quad a_i, b_i \in \mathbb{Z},$$

*temos que $C_p(K)$ apresenta estrutura de grupo abeliano, e o chamamos de **grupo das p-cadeias**.*

A partir da noção de cadeia definimos o bordo de um simplexo.

Definição 9 *O **bordo** de um k-simplexo orientado, σ^k, é uma (k-1)-cadeia, dada pela soma das suas faces de dimensão $k-1$ multiplicada por $[\sigma^k, \sigma^{k-1}]$. Assim,*

$$\partial(\sigma^k) = \sum_{i=0}^{k} [\sigma^k, \sigma^{k-1}]\sigma_i^{k-1}.$$

A noção de bordo de um simplexo dada acima pode ser estendida para o bordo de uma cadeia de simplexos, como segue.

Definição 10 *Definimos o **p-ésimo homomorfismo de bordo** ou **p-ésimo operador bordo**, $\partial_p : c_p(K) \to c_{p-1}(K)$ por:*

$$\partial_p(a_1\sigma_1^p + ... + a_n\sigma_n^p) = a_1\partial_p(\sigma_1^p) + ... + a_n\partial_p(\sigma_n^p)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_p\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\sigma_i^p\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\partial_p(\sigma_i^p) = \sum_{i=1}^{n} a_i[\sigma_i^p, \sigma_i^{p-1}]\sigma_i^{p-1}.$$

O bordo de uma 0-cadeia é definido como sendo zero.

Definição 11 *Sejam K um complexo orientado e $p \geq 0$. Um **p-ciclo** é uma p-cadeia z_p tal que $\partial_p(z_p) = 0$. As cadeias $c \in C_p(K)$, tais que $\partial(c) = 0$ são chamadas **ciclos**.*
O grupo ciclo p-dimensional de K é o conjunto de p-ciclos de $C_p(K)$, isto é,

$$Z_p(K) = \{c \in C_p(K); \partial_p(c) = 0\} = ker(\partial_p).$$

Já $B_p(K)$ é o conjunto das p-cadeias que são bordo de alguma (p+1)-cadeia, isto é,

$$B_p(K) = \{b \in C_p(K); b = \partial_{p+1}(c), c \in C_{p+1}(K)\} = Im(\partial_{p+1}).$$

Definição 12 *Seja K um complexo e w_p e z_p dois p-ciclos. Dizemos que w_p e z_p são **homólogos**, e escrevemos $w_p \sim z_p$, se existe uma (p+1)-cadeia c_{p+1} tal que $\partial(c_{p+1}) = w_p - z_p$. Em particular, se um p-ciclo t_p é bordo de uma (p+1)-cadeia, dizemos que t_p é homólogo a zero, isto é, $t_p \sim 0$.*

A relação de homologia definida acima é de equivalência. As classes de homologia de $Z_p(K)$, são

$$[z_p] = \{w_p \in Z_p(K) : w_p \sim z_p\},$$

as classes laterais são

$$z_p + B_p(K) = \{z_p + \partial_{p+1}(c_{p+1}) : \partial_{p+1}(c_{p+1}) \in B_p(K)\}.$$

e as classes homólogas pertencem ao grupo quociente

$$\frac{Z_p(K)}{B_p(K)}.$$

Definição 13 *Seja $p \geq 0$ e K um complexo orientado, o **grupo de homologia p-dimensional de K** é o grupo quociente*

$$H_p(K) = \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}.$$

Como exemplo, apresentamos os grupos de homologia simplicial do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$:

Grupos de homologia simplicial de $\mathbb{R}P^2$

Seja $\mathbb{R}P^2$ o plano projetivo, com a triangularização constituída de dois 0-simplexos V e W, três 1-simplexos a, b e c, e 2-simplexos U e L orientados como na figura.

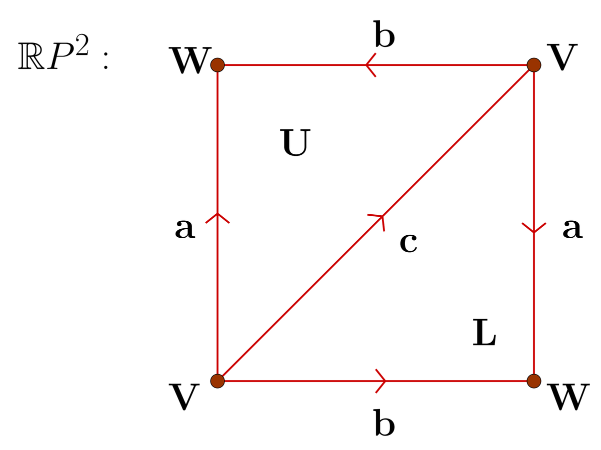

Figura 3: Triangularização do Plano Projetivo

O 1-simplexo c foi adicionado no retângulo para satisfazer o conceito de triangularização. A sequência de cadeias de $\mathbb{R}P^2$ é dada por

$$0 \to C_2(\mathbb{R}P^2) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{R}P^2) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{R}P^2) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

e equivale a

$$0 \to \langle U, L \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle a, b, c \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle V, W \rangle \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Fazendo os devidos cálculos de acordo com as definições apresentadas, obtemos os grupos de homologia do plano projetivo:

$$H_n(\mathbb{R}P^2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}, & para \;\; n = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & para \;\; n = 1 \\ \{0\}, & para \;\; n \geq 2 \end{cases} .$$

Grupo Fundamental

A noção de grupo fundamental, conhecida e utilizada atualmente, deve-se ao matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) que, em 1985, definiu-o em seu artigo *Analysis situs*. Aqui, faremos um breve estudo sobre tal grupo. Mais detalhes podem ser vistos nas referências [1] e [3].

Definição 14 *Sejam X e Y espaços topológicos e $I = [0,1]$. Duas aplicações contínuas $f, g : X \to Y$ são **homotópicas** quando existe uma aplicação contínua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$.*

Observação 1
1. *A aplicação H é chamada de **homotopia** entre f e g e denotada por $f \simeq g$. Além disso, a relação de homotopia é de equivalência.*
2. *Se $f \simeq g$ e g é constante, então dizemos que f é **homotopicamente nula**.*
3. *Chamamos de **classes de homotopia** as classes de equivalência segundo a relação de homotopia e denotamos a classe de homotopia de uma aplicação contínua $f : X \to Y$ por $[f] := \{g : X \to Y; g \simeq f\}$.*

Definição 15 *Seja X um espaço topológico. Um **caminho** em X é uma aplicação contínua $\alpha : [0,1] \to X$, onde $I = [0,1]$ é um intervalo fechado em $\mathbb{R}$. Se $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$, então α é um caminho de x para y e x, y são denominados **ponto inicial** e **ponto final**, respectivamente.*

Definição 16 *Dado um caminho $\alpha : I \to X$, seu **caminho inverso** $\alpha^{-1} : I \to X$, dado por $\alpha^{-1}(s) = \alpha^{-1}(1-s), 0 \leq s \leq 1$.*

Definição 17 *Dois caminhos $a, b : I \to X$ são ditos **caminhos homotópicos** se possuem as mesmas extremidades, isto é, $a(0) = b(0) = x$ e $a(1) = b(1) = y$ e se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \to X$ tal que, quaisquer que sejam $s, t \in I$, tenha-se $H(s,0) = a(s), H(s,1) = b(s), H(0,t) = x$ e $H(1,t) = y$. Se a e b são homotópicos escrevemos $a \cong b$.*
*A aplicação contínua H e chamada de **homotopia entre os caminhos** a e b.*

Exemplo 1 *Dado um subconjunto convexo X de um espaço vetorial e dois caminhos $a, b : I \to X$, se a e b tem as mesmas extremidades então $a \cong b$.*

Indicaremos com $\alpha = [a]$ a classe de homotopia do caminho $a : I \to X$, isto é, o conjunto de todos os caminhos em X que possuam as mesmas extremidades que a e que são homotópicos a a com extremos fixos durante a homotopia.

Definição 18 *Sejam $a, b : I \to X$ caminhos tais que $a(1) = b(0)$. Definimos o **produto** $a * b$ como sendo o caminho que consiste em percorrer primeiro a e depois b. Assim, o caminho $a * b : I \to X$ será dado por*

$$a * b(s) = \begin{cases} a(2s) & se \;\; 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ b(2s-1), & se \;\; \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} .$$

Como $a(1) = b(0)$, as regras acima definem bem uma aplicação $a * b : I \to X$ que, em particular, é contínua.

Definição 19 *Definimos como e_x o **caminho constante** tal que $e_x = x$ para todo $x \in I$. Para sua classe de homotopia, usaremos a notação $\varepsilon_x = [e_x]$.*

Proposição 1 *Sejam $a, b : I \to X$ caminhos tais que $a(1) = b(0)$. Se $a \cong a'$ e $b \cong b'$, então $a * b \cong a' * b'$ e $a^{-1} \cong a'^{-1}$.*

Em um espaço topológico X, sejam α a classe de homotopia de caminhos que começam em um ponto $x \in X$ e terminam em $y \in X$ e β a classe de homotopia de caminhos que começam em y e terminam em $z \in X$. Definimos o produto $\alpha\beta$ como $\alpha\beta = [a * b]$, desta forma, por definição, $[a][b] = [a * b]$. Pela Proposição 1 o produto $\alpha\beta$ não depende da escolha dos caminhos $a \in \alpha$ e $b \in \beta$, logo está bem definido.

De maneira análoga, definimos $\alpha^{-1} = [a^{-1}]$ sendo que $a \in \alpha$. Também, pela Proposição 1, temos que independente do caminho $a \in \alpha$, a classe de homotopia $\alpha^{-1} = [a^{-1}]$ é a mesma. A classe α^{-1} é chamada de inversa de α.

Proposição 2 *Sejam $a, b, c : I \to X$ caminhos tais que cada um deles termina onde o outro começa. Sejam $\alpha = [a], \beta = [b], \gamma = [c]$ suas classes de homotopia, $a(0) = x$ a origem de a, $a(1) = y$ seu fim, e_x, e_y os caminhos constantes sobre esses pontos e $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ as respectivas classes de homotopia destas constantes. Temos então*
1. $\alpha * \alpha^{-1} = \varepsilon_x$.
2. $\alpha^{-1} * \alpha = \varepsilon_y$.
3. $\varepsilon_x * \alpha = \alpha = \alpha * \varepsilon_y$.
4. $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$.

Tendo em vista que o produto de duas classes de homotopia de caminhos nem sempre está definido, o conjunto destas classes não necessariamente forma um grupo com a operação $*$, definida acima. Considerando o subconjunto formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base em $x_0 \in X$, denotado por $\pi_1(X, x_0)$, garantimos que o produto $\alpha * \beta$ esteja bem definido. Com isso, temos que $\pi_1(X, x_0)$ forma um grupo com a operação $*$, chamado **Grupo fundamental de** X com base no ponto x_0.

Proposição 3 *Se x_0 e x_1 pertencem à mesma componente conexa por caminhos de X, então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos. De maneira mais precisa, cada classe de homotopia de caminhos γ ligando x_0 a x_1 induz um isomorfismo $\overline{\gamma} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$, dado por $\overline{\gamma}(\alpha) = \gamma * \alpha * \gamma^{-1}$.*

Teorema de Hurewicz

A partir do que vimos, é razoável nos perguntar sobre uma relação entre a homologia no nível 1 e o grupo fundamental. O teorema a seguir responde, positivamente, a esta pergunta.

Teorema 1 (Teorema de Hurewicz) *Considerando laços como 1-ciclo simplicial, obtemos um homomorfismo $h : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$. Se X for conexo por caminhos, então h é sobrejetor e seu núcleo é o subgrupo comutador de $\pi_1(X)$, assim h induz um isomorfismo da abelianização de $\pi_1(X)$ em $H_1(X)$.*

5. Conclusões

Os objetivos do projeto foram cumpridos já que desenvolveram um conhecimento sobre álgebra, topologia e topologia algébrica. Além disso, com o estudo destes assuntos a bolsista desenvolveu seu interesse em seguir a pesquisa em um curso de pós-graduação.

6. Bibliografia

[1] E. L. Lima. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento.* IMPA, 1985.

[2] GONÇALVES, André Gomes Ventura. *Homologia Simplicial e a característica de Euler-Poincaré.* Dissertação de mestrado - ICMC-USP, São Carlos, 2023.

[3] VALDÉS, Wendy Díaz. *Relacionando o Grupo Fundamental e a Homologia Simplicial.* Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática)- Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018.

7. Agradecimentos

A FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

A minha orientadora, Sônia, pela paciência e pelo crescimento, pessoal e profissional, que me proporcionou.

8. Apoio financeiro