Simpósio de Integração Acadêmica

"Ciências Básicas para o Desenvolvimento Sustentável"

SIA UFV 2023

UFV Universidade Federal de Viçosa

Introdução à geometria hiperbólica plana

Denise Ezequiel da Silva - Departamento de Engenharia Florestal - Universidade Federal de Viçosa - denise.e.silva@ufv.br

Edson José Teixeira - Departamento de Matemática - Universidade Federal de Viçosa - edson.teixeira@ufv.br.

Inversões, Transformações de Mobius, geometria hiperbólica.

Introdução

A Geometria Hiperbólica tem sua origem ligada ao Quinto Postulado de Euclides que hoje é mais conhecido, por equivalência, ao Postulado das Retas Paralelas. Vários matemáticos suspeitaram que a negação deste postulado poderia gerar uma geometria consistente, dentre elas a Geometria Hiperbólica ou Geometria de Lobatchevsky.

Objetivos

O objetivo principal é introduzir a estudante na pesquisa científica. Neste caso foi abordado um estudo preliminar de Geometria Hiperbólica. Para isso foram estudadas propriedades de círculos no plano complexo, bem como uma classe especia de transformações de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, a saber as Transformações de Mobius. Este estudo permite fazer comparativos entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica plana.

Material e Métodos

A metodologia consiste em estudo de textos acadêmicos que abordam o tópico de Geometria Hiperbólica plana. Foram feitas reuniões semanais para discutir os tópicos do projeto junto com o orientador.

Resultados e Discussões

O conceito de inversão, com respeito a um círculo (ou reta), de um número complexo é utilizado para obter propriedades sobre Transformações de Mobius.

Definição 1. *Sejam $C_0(z_0, \rho_0)$ um círculo de centro z_0 e raio ρ_0 e z um ponto do plano complexo tal que $z \notin C_0(z_0, \rho_0)$ e $z \neq z_0$. O inverso de z em relação à C_0, denotado por z^*, é um ponto de $\mathbb{C}$ que pertence a todos os círculos que passam por z e que são ortogonais a C_0.*

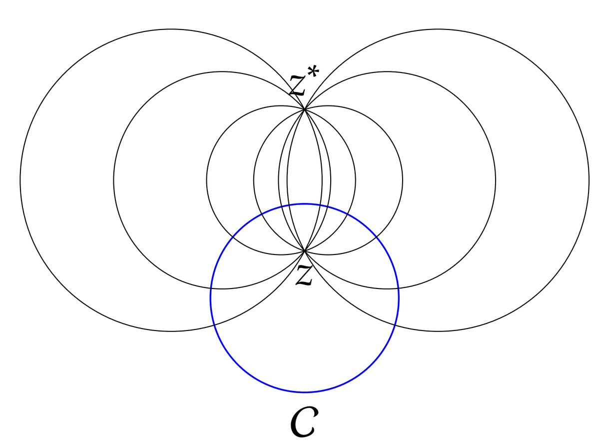

Figura 1: Inverso de z com relação ao círculo C

É possível verificar que este ponto existe e é único, garantindo uma boa definição do conceito. A inversão possui a propriedade de transformar círculos (incluindo retas) em círculos. Além a inversão é uma aplicação inverte o sinal do ângulo entre curvas.

A partir deste estudo podemos definir uma classe especial de funções fracionárias, chamadas de Transformações de Mobius.

Definição 2. *A transformação de Mobius é definida por*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

em que z varia no plano complexo e a, b, c, d são constantes complexas.

Toda transformação de Moebius pode ser escrita como a composição de um número par de inversões, sendo que o número máximo de inversões é 14.

Teorema 3. *Toda transformação de Möbius é uma aplicação conforme do plano complexo estendido ao plano complexo estendido. Ela transforma círculos(incluindo retas) em círculos(incluindo retas).*

O semiplano superior é definido por

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C};\ Im(z) > 0\}.$$

O comprimento de uma curva e a distância entre dois pontos quaisquer de $\mathbb{H}^2$ são definidos nas duas próximas definições. A distância assim definida corresponde a uma métrica neste conjunto.

Definição 4. *Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{H}^2$ uma curva diferenciável. O comprimento hiperbólico da curva γ é definido por*

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{Im[\gamma(t)]} dt.$$

Definição 5. *Dados dois pontos $z, w \in \mathbb{H}^2$, a distância hiperbólica entre z e w é definida por*

$$d(z, w) = \inf \|\gamma\|,$$

em que o ínfimo é tomado sobre todas as curvas γ ligando z e w em $\mathbb{H}^2$.

A métrica assim definida permite obter fórmula mais acessíveis para o cálculo de distância de dois pontos.

Proposição 6. *O espaço $\mathbb{H}^2$ com a a medida d definida anteriormente é um espaço métrico.*

A geodésicas, que são curvas de comprimento mínimo, ligando dois pontos de $\mathbb{H}^2$ são círculo ou retas passando por estes dois pontos e ortogonais ao eixo real.

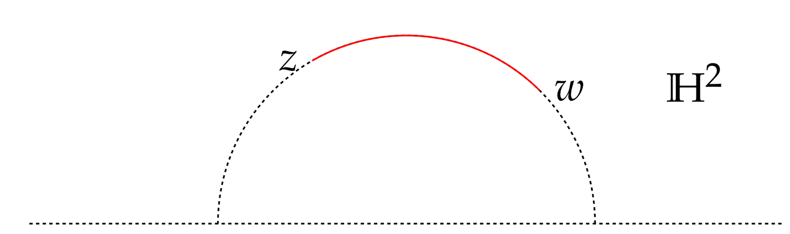

Figura 2: Geodésica ligando z a w

Teorema 7. *O grupo das isometrias de $(\mathbb{H}^2, d)$ é precisamente o grupo das aplicações da forma*

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad ou \quad \phi(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d},$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$.

Vamos considerar agora o modelo do Disco de Poincaré, que consiste no conjunto de todos os pontos da forma $|z| \leq 1$ denotado por $\mathbb{D}^2$. O estudo deste modelo, em geral, é feito recorrendo a resultados obtidos no modelo $\mathbb{H}^2$.

A aplicação

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

transforma o semiplano $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{D}^2$, já que $|f(z)| \leq 1$ quando $y \geq 0$.

Definição 8. *A distância entre dois pontos z e w do disco $\mathbb{D}^2$ é definida por*

$$d^*(z, w) = d(f^{-1}(z), f^{-1}(w)),$$

em que d é a distância definida no semiplano superior.

Da forma como foi definida a métrica em $\mathbb{D}^2$, pelo fato de uma Transformação de Mobius preservar ângulos e transformar círculos (incluindo retas) em círculos, a geodésicas em $\mathbb{D}^2$ serão círculos ou retas ortogonais ao círculo unitário.

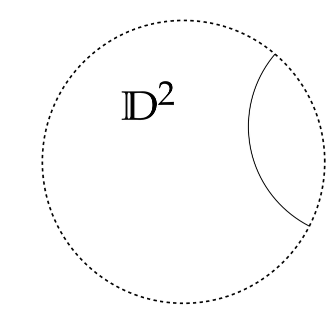

Figura 3: Geodésica no modelo $\mathbb{D}^2$.

Teorema 9. *A aplicação $\phi : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ é isometria em $(\mathbb{D}^2, d^*)$, se e somente se,*

$$\phi(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \quad ou \quad \phi(z) = \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}},$$

em que $a, c \in \mathbb{C}$ e $|a|^2 - |c|^2 > 0$.

Conclusões

Com este estudo é possível compreender que as propriedades geométricas estão inteiramente relacionadas com a métrica adotada em cada modelo de Geometria. Foi possível também fazer comparativos e analogias com a Geometria Euclidiana que é a Geometria estudada em cursos dos ensinos fundamental, médio e superior.

Bibliografia

[1] E. J. Teixeira e S. M. Moraes, *Transformações de Möebius e Geometria Hiperbólica*. Iniciação Científica PIBIC-CNPQ, 2005-2006.

[2] L. F. C. Rocha, *Introdução à geometria hiperbólica plana*. Impa, 1987.

[3] D. Pinto e M. C. F. Morgado,*Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*. Série Ensino, Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

[4] H. Schwerdtfeger, *Geometry of Complex Numbers*. Dover Publications, New York, 1979.

Apoio Financeiro

Este projeto contou com apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).