

Simpósio de Integração Acadêmica

"Ciências Básicas para o Desenvolvimento Sustentável"

SIA UFV 2023



TÓPICOS DE TOPOLOGIA ALGÉBRICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA - CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Ellen Peixoto de Oliveira - ellen.peixoto@ufv.br Sônia Maria Fernandes - somari@ufv.br

Pesquisa-Geometria/Topologia-Matemática

Palavras-chaves: simplexo, complexo simplicial, homologia.

1. Introdução

A topologia algébrica é o ramo da matemática que relaciona as áreas de álgebra e topologia. O objetivo é introduzir ferramentas algébricas (respectivamente topológicas) em problemas topológicos (respectivamente algébricos). Neste trabalho exploramos conceitos e propriedades da homologia simplicial, que possui como objetivo principal estudar espaços topológicos, cujos componentes estruturais são n -simplexos.

2. Objetivos

Relacionar conceitos de homologia simplicial, mais precisamente os grupos de homologia, com o grupo fundamental. Como resultado, trazemos a ideia geométrica da homologia e também uma aplicação, o cálculo detalhado dos grupos de homologia do toro.

3. Material e Métodos

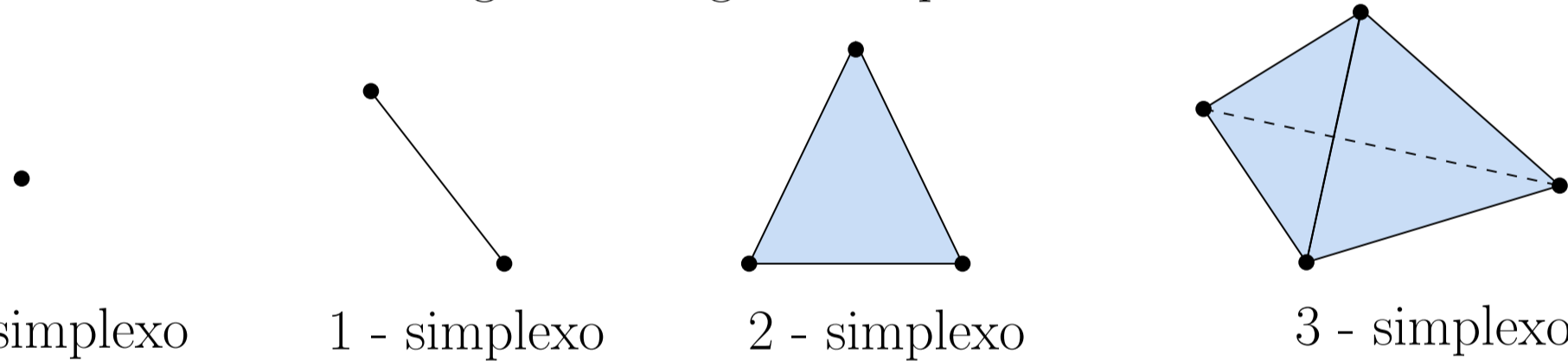
O material utilizado foram livros selecionados, especialmente a referência [1]. A metodologia empregada neste trabalho foi a leitura de livros selecionados pela orientadora, encontros semanais para discussão de temas estudados e apresentação de seminários dos tópicos abordados.

4. Homologia Simplicial

Um subconjunto $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que os vetores $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_k - a_0$ são linearmente independentes é dito **conjunto geometricamente independente**. Dado um conjunto $X = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ de pontos geometricamente independente, um **k -simplexo** é o menor conjunto convexo que contém X . Denotamos por σ^k . Os elementos de X são chamados vértices do k -simplexo.

Exemplo 1.

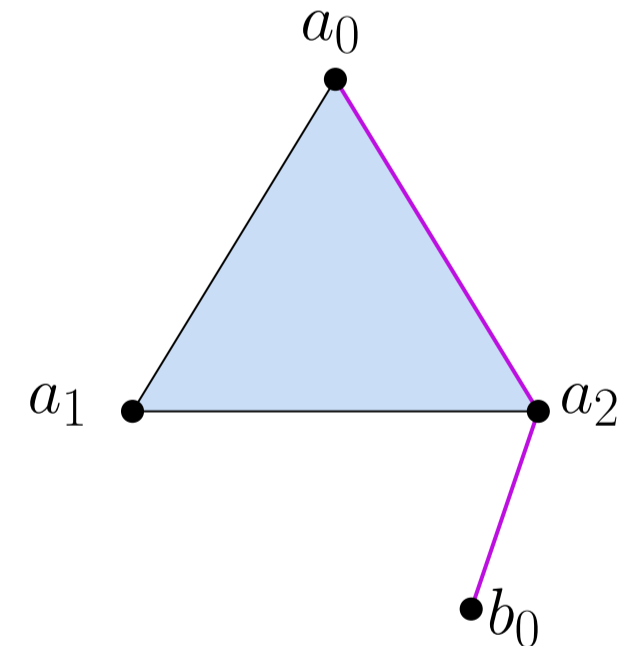
Figura 1: Alguns Simplexos



Dizemos que um simplexo σ^k é uma **face** de um simplexo σ^n , com $k \leq n$, quando cada vértice de σ^k é um vértice de σ^n . Se σ^n é o simplexo com vértices a_0, a_1, \dots, a_n , escrevemos $\sigma^n = \langle a_0 \dots a_n \rangle$.

Exemplo 2.

Figura 2: Calculando as Faces de σ^2 .



As faces do simplexo $\sigma^2 = \langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ são:

$$\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_0 a_2 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle \text{ e } \langle a_0 a_1 a_2 \rangle.$$

Por outro lado, $\langle b_0 a_2 \rangle$ não é face de σ^2 , pois b_0 não é vértice de σ^2 . Dizemos que dois simplexos σ^m e σ^n são **propriamente unidos**, se $\sigma^m \cap \sigma^n$ é vazio ou $\sigma^m \cap \sigma^n$ é uma face de ambos. Um **complexo simplicial** é uma família finita K de simplexos geométricos os quais são propriamente unidos e tem a propriedade de que cada face de um elemento de K é também um elemento de K . A **dimensão** de K é o maior índice positivo r tal que K tenha um r -simplexo. Intuitivamente, uma **triangulação** de um espaço topológico X é uma cobertura do espaço formada apenas por formas triangulares, as quais possuem um ou um vértice em comum ou uma aresta em comum ou são disjuntas. Um **n -simplexo orientado**, $n \geq 1$, é obtido de um n -simplexo $\sigma^n = \langle a_0 \dots a_n \rangle$ escolhendo a ordem para esses vértices. A classe equivalente de permutações pares para escolha da ordem, determina o simplexo orientado positivamente $+\sigma^n$, enquanto a classe equivalente das permutações ímpares determina o simplexo orientado negativamente. Um **complexo simplicial orientado** é obtido de um complexo simplicial atribuindo uma orientação para cada simplexo. Consideraremos K um complexo simplicial orientado. Sejam simplexos σ^{p+1} e σ^p em K cuja dimensões diferem por 1. Associamos a cada par (σ^{p+1}, σ^p) um **número de incidência**, denotado por $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$, definido como:

(i) Se σ^p não é uma face de σ^{p+1} , então $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$.
Suponha que σ^p é uma face de σ^{p+1} e ordene os vértices a_0, a_1, \dots, a_p de σ^p tal que $+\sigma^p = \langle a_0 a_1 \dots a_p \rangle$. Seja v o vértice de σ^{p+1} , o qual não é vértice de σ^p .

(ii) Se $+\sigma^{p+1} = \langle v a_0 a_1 \dots a_p \rangle$, então $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 1$.

(iii) Se $+\sigma^{p+1} = -\langle v a_0 a_1 \dots a_p \rangle$, então $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = -1$.

Fixado um número natural p , denotamos os simplexos p -dimensionais de K por $\sigma_1^p, \sigma_2^p, \dots, \sigma_n^p$. Denotamos o conjunto das combinações lineares formais desses elementos por $C_p(K)$. Um elemento $c_p \in C_p(K)$ é chamado de **p -cadeia**. Uma **p -cadeia elementar** é identificada com um p -simplexo orientado positivamente. O **bordo de uma p -cadeia elementar** σ^p , com $p \geq 1$, é definido por

$$\partial_p(\sigma^p) = \sum_{\sigma_i^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] \cdot \sigma_i^{p-1}.$$

O **bordo de uma p -cadeia** é dado por

$$\partial_p(c_p) = \sum_{g_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i^p \in K} g_i \cdot \partial_p(\sigma_i^p), \text{ com } c_p = \sum_{g_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i^p \in K} g_i \sigma_i^p.$$

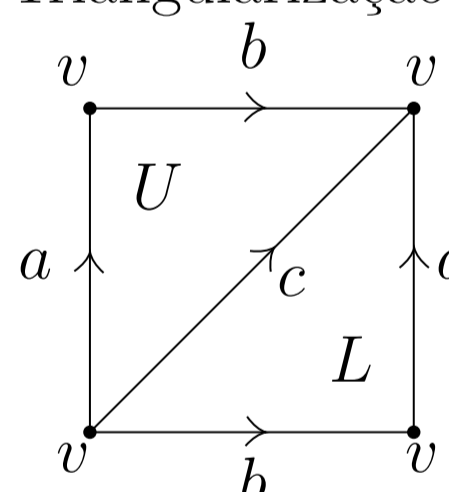
O **bordo de uma 0-cadeia** é definido como sendo zero. Seja $p \geq 0$. Um **p -ciclo** é uma p -cadeia z_p tal que $\partial_p(z_p) = 0$. O núcleo do homomorfismo $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ é um subgrupo de $C_p(K)$ e é a família de p -ciclos, denotado por $Z_p(K)$, chamado de **grupo ciclo p -dimensional** de K . Um **p -bordo** é uma p -cadeia b_p se existe uma $(p+1)$ -cadeia c_{p+1} tal que $\partial_{p+1}(c_{p+1}) = b_p$. A imagem do homomorfismo $\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \rightarrow C_p(K)$ é um subgrupo de $C_p(K)$ e é a família de p -bordos, denotada por $B_p(K)$, chamada de **grupo bordo p -dimensional** de K . Se n é a dimensão de K , então não existe p -cadeias em K para $p > n$, nesse caso $C_p(K) = \{0\}$. O **grupo de homologia p -dimensional** de K é o grupo quociente

$$H_p(K) = \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}.$$

5. Cálculo do Grupo de Homologia do Toro

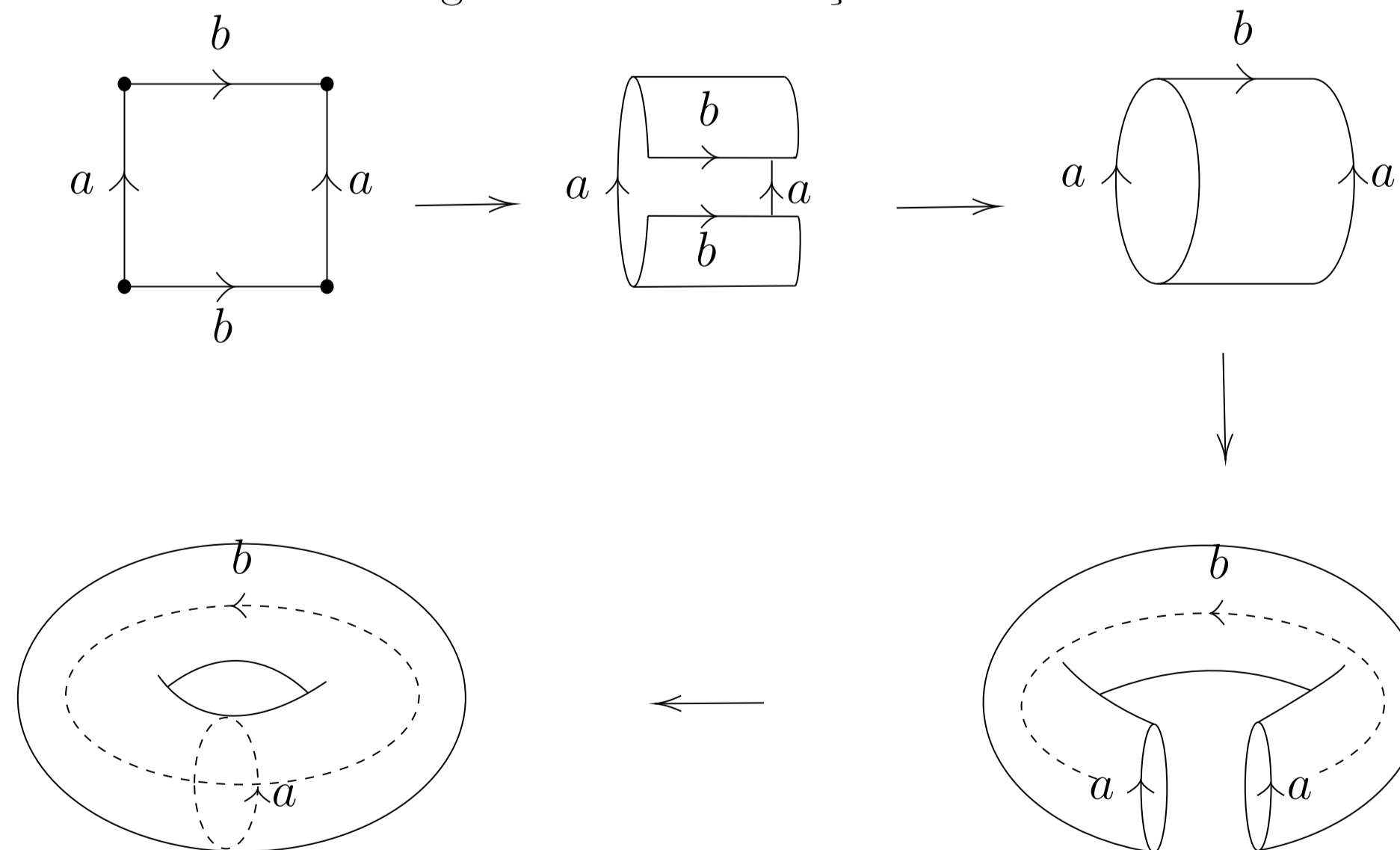
Uma triangulação do toro, \mathbb{T}^2 , é dada pela figura 3, composta por um 0-simplexo v , três 1-simplexos a, b, c e dois 2-simplexos U, L .

Figura 3: Triangularização do Toro \mathbb{T}^2



Uma visualização da transformação do toro é dada pela figura 4.

Figura 4: Transformação do Toro



Para o cálculo de $H_n(\mathbb{T})$ vamos supor:

$c_0 = gv$, $c_1 = g_0a + g_1b + g_2c$ e $c_2 = h_0U + h_1L$, uma 0-cadeia, 1-cadeia e 2-cadeia qualquer do toro, respectivamente.

Cálculo de $Z_n(\mathbb{T})$

$Z_0(\mathbb{T}) = \langle v \rangle$, pois

$$\partial_0(c_0) = \partial_0(gv) = g\partial_0(v) \stackrel{def}{=} 0.$$

$Z_1(\mathbb{T}) = \langle a, b, c \rangle$. De fato,

$$\partial_1(c_1) = (g_0)\partial_1(a) + g_1\partial_1(b) + g_2\partial_1(c) = (g_0 + g_1 + g_2)(v - v) = 0.$$

$Z_2(\mathbb{T}) = \langle U - L \rangle$. De fato,

$$\partial_2(c_2) = \partial_2(h_0U + h_1L) = (h_0 + h_1)(a + b - c).$$

$$\partial_2(c_2) = 0 \Leftrightarrow (h_0 + h_1)a + (h_0 + h_1)b + (-h_0 - h_1)c = 0 \Leftrightarrow h_1 = -h_0.$$

Logo, $c_2 = h_0U + h_1L = h_0(U - L)$.

$Z_p(\mathbb{T}) = \{0\}$, com $p > 2$, pois a dimensão do toro é 2.

Cálculo de $B_n(\mathbb{T})$

$B_0(\mathbb{T}) = \{0\}$, pois

$$\partial_1(c_1) = c_0 \Leftrightarrow c_0 = 0.$$

$B_1(\mathbb{T}) = \langle a + b - c \rangle$. De fato,

$$\partial_2(c_2) = c_1 \Leftrightarrow (h_0 + h_1)(a + b - c) = g_0a + g_1b + g_2c$$

$$\Leftrightarrow g_0 = g_1 \text{ e } g_2 = -g_0 \text{ com } g_0 = h_0 + h_1.$$

$$\partial_2(c_2) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = g_0a + g_1b + g_2c = (h_0 + h_1)(a + b - c).$$

$B_2(\mathbb{T}) = \{0\}$, pois no toro não existem 3-simplexos.

$B_p(\mathbb{T}) = \{0\}$, com $p > 2$, pois o toro possui $(p+1)$ -simplexos.

Cálculo de $H_n(\mathbb{T})$

$$H_0(\mathbb{T}) = \frac{Z_0(\mathbb{T})}{B_0(\mathbb{T})} = \frac{\langle v \rangle}{\{0\}} \cong \langle v \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Seja $Z_1(\mathbb{T})$ gerado por $B = \{a, b, c\}$ e seja $C = \{a, b, a + b - c\}$. Logo,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é a matriz mudança de B para C . Desta forma, $Z_1(\mathbb{T}) = \langle a, b, a + b - c \rangle$. Logo,

$$H_1(\mathbb{T}) = \frac{\langle a, b, c \rangle}{\langle a, b, a + b - c \rangle} = \frac{\langle a, b, a + b - c \rangle}{\langle a + b - c \rangle} = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

$$H_2(\mathbb{T}) = \frac{Z_2(\mathbb{T})}{B_2(\mathbb{T})} = \frac{\langle U - L \rangle}{\{0\}} \cong \langle U - L \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

$$H_p(\mathbb{T}) = \frac{Z_p(\mathbb{T})}{B_p(\mathbb{T})} \cong \frac{\{0\}}{\{0\}} \cong \{0\}, \text{ com } p > 2.$$

Portanto,

$$H_n(\mathbb{T}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } n = 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, 2 \\ \{0\}, & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

6. Ideia Geométrica dos Grupos de Homologia

Teorema 1. Seja K um complexo simplicial com r componentes conexas por caminhos, então $H_0(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ vezes}}$.

Geometricamente, o grupo $H_n(X)$, com $n \geq 1$, está relacionada com a quantidade e os tipos de "buracos" n -dimensionais em X .

7. Conclusão

Conseguimos alcançar o objetivo principal do projeto, que era estudar as propriedades e a visão geométrica tanto dos grupos de homologia quanto do grupo fundamental. Além disso, foi possível perceber que as visões geométricas desses dois objetos estão intimamente relacionadas, uma vez que ambas estão associadas com "buracos" n -dimensionais.

8. Apoio Financeiro

Este projeto contou com o apoio financeiro do CNPq.

9. Bibliografia

- [1] W. D. Valdés. *Relacionando o Grupo Fundamental e a Homologia Simplicial*. 2018.
- [2] E. L. Lima. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, 2018.
- [3] E. L. Lima. *Homologia Básica*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2014.
- [4] F. H. Croom. *Basic Concepts of Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1978.