UMA INTRUDUÇÃO À GEOMETRIA FRACTAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA - CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
João Victor Alves Silveira - joao.v.silveira@ufv.br André Junqueira da Silva Correa - andre.junqueira@ufv.br

Pesquisa-Geometria e Topologia-Matemática

Palavras chaves: Geometria, Fractal, Sistema Iterado de Funções.

1. Introdução

Em 1872, Weierstrass apresentou uma função que é contínua em todos os reais porém não é diferenciável em nenhum ponto, ou seja, não é possível traçar uma reta tangente em nenhum de seus pontos apesar de não apresentar nenhuma descontinuidade. Seu gráfico é um exemplo de conjunto fractal, que quando foi apresentado chocou os matemáticos por ser uma função onde os métodos clássicos do cálculo não se aplicavam. O nome fractal foi cunhado por Mandelbrot no seu trabalho fundamental, a palavra tem origem do latim *fractus*, que significa quebrado, para descrever objetos que eram irregulares demais para serem descritos pela geometria tradicional, porém mais recentemente foi percebido que muito pode ser dito sobre tais conjuntos. Embora muito diferentes entre si muitos fractais se assemelham em algumas características como possuir copias de se mesmo em diferentes escalas, "estruturas finas", isto é, contém detalhes em escalas arbitrariamente pequenas, e podem ser obtidos por meio de um procedimento recursivo. Neste pôster trataremos do conjuntos fractais gerados por sistemas iterados de funções contratoras, bem como medidas invariantes e dimensão de Hausdorff desses conjuntos.

2. Objetivos

Este projeto teve como objetivo revisar algumas noções básicas para o estudo da geometria fractal como espaços métricos, medidas e dimensão, que são utilizados como ferramenta para o estudo do conjunto de Cantor e de conjuntos fractais mais gerais que podem ser obtidos por sistemas iterado de funções, no qual um conjunto de mapas contratores após infinitas iteradas geram um fractal com todas suas características de auto-similaridade e detalhamento infinito.

3. Material e Métodos

A metodologia utilizada para alcançar tais objetivos consistiu na revisão de livros bibliográficos e artigos relacionados ao tema, além de exposição semanal com o orientador.

4. Sistema Iterado de Funções

Aqui apresentaremos o principal resultado estudado que nos garante que um sistema iterado de funções, que para nós não é nada mais do que um conjunto de mapas contratores, formará um único conjunto invariante que será um fractal. Além disso falaremos de medidas invariantes sobre esse conjunto de mapas, bem como uma forma de encontrar a dimensão de Hausdorff desses conjuntos gerados pelos IFS (sistema iterado de funções).

Seja $\mathscr{S} = \{S_1, ..., S_n\}$ um conjunto de mapas contratores num espaço métrico completo (X, d). $LipS_i = r_i$. Dado um $A \subset X$ arbitrário, seja $\mathscr{S}(A) = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(A)$. Defina $\mathscr{S}^0(A) = A, \mathscr{S}^1(A) = \mathscr{S}, \mathscr{S}^p(A) = \mathscr{S}(\mathscr{S}^{p-1}(A))$ para $p \geq 2$.

Definição 1. *A é invariante (com respeito a $\mathscr{S}$) se $A = \mathscr{S}(A)$*

Seja $\rho = \{\rho_1, ..., \rho_n\}$ com $\rho_i \in (0, 1)$ e $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1$.

Definição 2. *Se $\nu \in \mathscr{M}$ seja $(\mathscr{S}, \rho)(\nu) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i S_{i\#}\nu$, isto é, $(\mathscr{S}, \rho)(\nu)(A) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \nu(S^{-1}(A))$. Defina $(\mathscr{S}, \rho)^0(\nu) = \nu, (\mathscr{S}, \rho)^1(\nu) = (\mathscr{S}, \rho)(\nu), (\mathscr{S}, \rho)^p(\nu) = (\mathscr{S}, \rho)((\mathscr{S}, \rho)^{p-1}(\nu))$ para $p \geq 2$.*

Definição 3. *Dado $\mu, \nu \in \mathscr{M}^1$ seja*

$$L(\mu, \nu) = \sup\{\mu(\phi) - \nu(\phi) : \phi : X \to \mathbb{R}, Lip\phi \leq 1\}$$

Definição 4. *K é dito auto-similar (com respeito a $\mathscr{S}$) se*

(i) K é invariante com respeito a $\mathscr{S}$, e

(ii) $\mathcal{H}^k(K) > 0, \mathcal{H}(K_i \cap K_j) = 0$ para $i \neq j$ onde $k = dim_H(K)$

Definição 5. *Se $\sum_{i=1}^{N} r_i^D = 1$, então D é chamado a dimensão de similaridade de $\mathscr{S}$.*

Teorema 1. *(i) Existe um único conjunto fechado e limitado K que é invariante com respeito a $\mathscr{S}$. Mais ainda, K é compacto. Notação: $|\mathscr{S}| = K$.*

(ii) $(\mathscr{S}, \rho) : \mathscr{M}^1 \to \mathscr{M}^1$ é um mapa contrator na métrica L

(iii) Existe uma única medida$\mu \in \mathscr{M}^1$ tal que $(\mathscr{S}, \rho)\mu = \mu$. Se $\nu \in \mathscr{M}^1$ então $(\mathscr{S}, \rho)^p(\nu) \to \mu$ na métrica L.

(iv) $\mathcal{H}^D(K) < \infty$ e portanto $dim_H(K) \leq D$.

(v) K é auto-similar se e somente se $dim_H(K) = D$.

Demonstração: A prova pode ser encontrada em [1]. ■

5. Exemplos

Exemplo 1. ***Conjunto de Cantor*** *A partir do intervalo $[0, 1]$ é possível obter o conjunto de Cantor, também denominado conjunto de Cantor de terço médio, do seguinte modo: retira-se do intervalo o seu terço médio aberto$(1/3, 2/3)$, sendo assim resta o conjunto $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Agora dos intervalos restantes, retira-se novamente seus respectivos terços médios abertos $(1/9, 2/9)$ e $(7/9, 8/9)$ sobrando assim $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. E então repete-se o processo infinitamente. Ao conjunto dos pontos restantes $C := \cap_{n-1}^{\infty} C_n$ é chamado de conjunto de Cantor.*

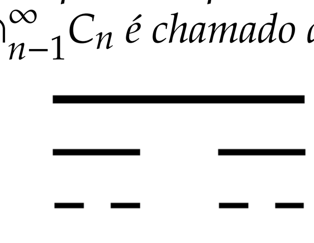

Figura 1: *Construção do conjunto de Cantor*

Sejam I_n os intervalos retirados durante a construção do conjunto de Cantor, assim C pode ser escrito da seguinte forma $C = [0, 1] \cap (\mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n)$, portando C é fechado.

Seja

$$\mathscr{S}_r = \{S_1(r), S_2(r)\}, S_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$S_1(r)(x) = \frac{x}{r}, S_2(r)(x) = \frac{-x}{r} + 1$$

Se $r = \frac{1}{3}$, então $\mathscr{S}_r(C) = C$ onde C é o conjunto de Cantor de terço médio. Note que cada S_i é uma contração.

Agora, se temos $0 < r < 1/2$ então $|\mathscr{S}_r|$ teremos um conjunto de Cantor generalizado.

Se $1/2 \leq r < 1$, é fácil ver que $\mathscr{S}_r([0, 1]) = [0, 1]$. Como o sabemos que o intervalo $[0, 1]$ é compacto segue $|\mathscr{S}_r| = [0, 1]$.

A conjunto de cantor é auto-similar, possuindo 2 cópias de si mesmo, cada uma delas contraídas a 1/3 do tamanho original, então sua dimensão de similaridade é dada pela solução da equação:

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{3}^D = 1 \Rightarrow D = \frac{\log(1/2)}{\log(1/3)} = \frac{\log(2)}{\log(3)}.$$

E pelo teorema anterior segue que $dim_H(C) = \frac{\log(2)}{\log(3)}$

Exemplo 2. ***Curva de Koch*** *Seja*

$$\mathscr{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}, S_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$S_1(x, y) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

contraia a 1/3 e rotacione $0°$.

$$S_2(x, y) = \begin{bmatrix} 1/6 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

contraia a, 1/3 rotacione $60°$e translade 1/3 para a direita.

$$S_3(x, y) = \begin{bmatrix} 1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{bmatrix},$$

contraia a 1/3, rotacione $-60°$e translade 1/2 para a direita e $\sqrt{3}/6$ para cima.

$$S_4(x, y) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

contraia a 1/3, rotacione $0°$ e translade 1/3 para a direita.

O conjunto $K = \lim_{p \to \infty} \mathscr{S}^p(I)$ é chamado de Curva de Koch.

Note que, todas as aplicações escalonam o conjunto em 1/3, portanto todas são contrações. Além disso, é fácil ver que K é compacto utilizando coberturas abertas e que $\mathscr{S}(K) = K$, logo $|\mathscr{S}| = K$.

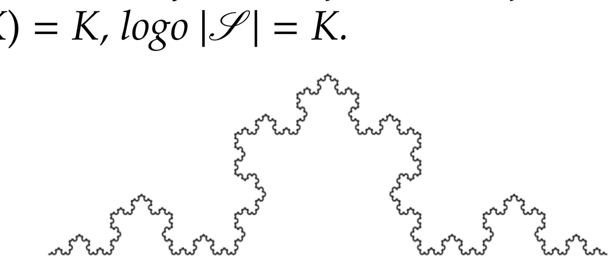

Figura 2: *Curva de Koch*

A curva de Koch é auto-similar, possuindo 4 cópias de si mesmo, cada uma delas contraídas a 1/3 do tamanho original, então sua dimensão de similaridade é dada pela solução da equação:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{3}^D = 1 \Rightarrow D = \frac{\log(1/4)}{\log(1/3)} = \frac{\log(4)}{\log(3)}.$$

E pelo teorema anterior segue que $dim_H(K) = \frac{\log(4)}{\log(3)}$

6. Conclusões

Como conclusão foi obtido que cada sistema iterado de funções gera um único conjunto compacto cuja dimensão pode ser obtida através de uma equação algébrica envolvendo as constantes de lipschitz das funções presentes no sistema, além de definir uma única medida invariante com respeito o sistema.

7. Apoio Financeiro

Este projeto contou com o apoio financeiro da CNPq.

8. Referências Bibliográficas

[1] HUTCHINSON, J. E. Fractals and Self Similarity. **Indiana University Mathematics Journal**, v.30, p.713-747, 1981.

[2] IOMMI, G. **The Bowen Formula** : Dimension Theory and Thermodynamic Formalism. Valparaıso : 2008.

[3] FALCONER, K. **Fractal Geometry:** Mathematical Foundations and Aplications. 2ed. Wiley–Blackwell, 2003.