



Simpósio de Integração Acadêmica

“Ciências Básicas para o Desenvolvimento Sustentável”

SIA UFV 2023



SUPERFÍCIES INVARIANTES EM $M^2 \times \mathbb{R}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA - CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Júlio Gama Ramalho de Oliveira - julio.ramalho@ufv.br Ady Cambraia Junior - ady.cambraia@ufv.br

Pesquisa-Geometria e Topologia-Matemática

Palavras chaves: Geometria Hiperbólica, Superfícies, Isometrias.

1. Introdução

Neste projeto, nosso objetivo principal foi estudar e fazer algumas caracterizações das superfícies invariantes por isometrias nos espaços tridimensionais $M^2 \times \mathbb{R}$, onde $M = \mathbb{R}, \mathbb{H}, \mathbb{S}$, com foco em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^1$

A primeira parte do trabalho é composto das preliminares para podermos falar de modo mais natural sobre as superfícies invariantes de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Ou seja, focamos inicialmente em entender como o espaço \mathbb{H}^2 se comporta geometricamente. A partir daí avaliamos as parametrizações das superfícies invariantes por cada tipo de isometria de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e finalizamos com alguns resultados sobre o tema.

2. Características de \mathbb{H}^2

Veremos nessa seção as principais noções geométricas de dois modelos do plano hiperbólico: o semiplano superior \mathbb{H}^2 e o disco de Poincaré \mathbb{D} .

Definição 0.1. 1. Definimos como o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 o conjunto

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

2. Chamamos de $T_{z_0}\mathbb{H}^2$ o espaço tangente de \mathbb{H}^2 no ponto $z_0 \in \mathbb{H}^2$.

3. O **bordo no infinito** de \mathbb{H}^2 , ou **bordo assintótico** é o conjunto formado pelo eixo real $\{y = 0\}$ e o ponto no infinito ∞ e o denotamos por $\partial_\infty\mathbb{H}^2$. Temos, então

$$\partial_\infty\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Definição 0.2. Designamos por $\mathbf{g}_\mathbb{H}$ a métrica hiperbólica de \mathbb{H}^2 , de modo que

$$\mathbf{g}_\mathbb{H}(\vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_\mathbb{H} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\text{Im}^2(z_0)}, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in T_{z_0}\mathbb{H}^2.$$

Ou seja, se \mathbf{g} é a métrica euclidiana de \mathbb{R}^2 , temos

$$\mathbf{g}_\mathbb{H} = \frac{1}{\text{Im}^2(z)} |dz|^2 = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2) = \frac{1}{y^2} \mathbf{g},$$

onde $z = x + iy$ e $|dz|^2 = dx^2 + dy^2$ designa o produto escalar euclidiano.

Definição 0.3. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, uma curva C^1 . Definimos o **comprimento hiperbólico** de γ , denotado por $L_\mathbb{H}(\gamma)$, como

$$L_\mathbb{H}(\gamma) = \int_a^b \mathbf{g}_\mathbb{H}(\gamma'(t), \gamma'(t))^{1/2} dt.$$

Definição 0.4. Denotando por $d_\mathbb{H}(z_1, z_2)$, onde $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$, definimos a **distância hiperbólica** entre dois pontos por:

$$d_\mathbb{H}(z_1, z_2) = \inf \left\{ L_\mathbb{H}(c), c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2 \mid c(0) = z_1, c(1) = z_2, C^1 \text{ por partes} \right\}.$$

Definição 0.5. Um difeomorfismo φ de \mathbb{H}^2 é uma **isometria** de \mathbb{H}^2 se φ preserva a métrica $\mathbf{g}_\mathbb{H}$, isto é, se φ verifica

$$\mathbf{g}_\mathbb{H}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathbf{g}_\mathbb{H}(d_z\varphi(\vec{u}), d_z\varphi(\vec{v}))$$

para todo $z \in \mathbb{H}^2$ e todos vetores $\vec{u}, \vec{v} \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$. Dizemos que φ é uma **isometria positiva** se φ preserva a orientação. Caso contrário, dizemos que φ é uma **isometria negativa**.

Agora, considerando o disco unitário aberto

$$\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}.$$

e a aplicação

$$\varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \rightarrow \frac{z-i}{z+i},$$

temos que o seguinte lema nos concede uma métrica sobre \mathbb{D} de modo que φ seja uma isometria entre os modelos.

Lema 0.6. A única métrica $\mathbf{g}_\mathbb{D}$ definida sobre \mathbb{D} tal que φ seja uma isometria de $(\mathbb{H}^2, \mathbf{g}_\mathbb{H})$ sobre $(\mathbb{D}, \mathbf{g}_\mathbb{D})$ é

$$\mathbf{g}_\mathbb{D} = \frac{4|dw|^2}{(1-|w|^2)^2} = \frac{4}{(1-|w|^2)^2} \mathbf{g}, \quad w = u + iv, \quad |w| < 1.$$

Definição 0.7. 1. O disco \mathbb{D} munido da métrica $\mathbf{g}_\mathbb{D}$ é chamado de **Disco de Poincaré**.

2. Chamamos de **bordo no infinito** de \mathbb{D} e denotamos por $\partial_\infty\mathbb{D}$, o círculo \mathbb{S}^1 , ou seja:

$$\partial_\infty\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}.$$

Definição 0.8. Uma curva c, C^1 por partes regular, $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{H}^2$, é uma **geodésica** se

$$d_\mathbb{H}(c(t_1), c(t_2)) = L_\mathbb{H}[c(t_1), c(t_2)], \quad \forall t_1, t_2 \in (a, b)$$

Classificamos as isometrias positivas de \mathbb{H}^2 em três tipos baseado na quantidade de pontos fixos que cada uma possui: **isometrias hiperbólicas** (dois pontos fixos em $\partial_\infty\mathbb{H}^2$); **isometrias parabólicas** (um ponto fixo em $\partial_\infty\mathbb{H}^2$); **isometrias elípticas** (um ponto fixo em \mathbb{H}^2). O resultado seguinte sobre as isometrias de \mathbb{H}^2 é o suficiente para esse trabalho.

Proposição 0.9. 1. Se T é uma isometria elíptica de \mathbb{D} , então T se comporta como uma rotação em torno do centro de \mathbb{D} .

2. Se T é uma isometria parabólica de \mathbb{H}^2 que possui ∞ como ponto fixo, então T se comporta como uma translação horizontal.

3. Se T é uma isometria hiperbólica de \mathbb{H}^2 que possui ∞ como um dos pontos fixos, então T se comporta como uma homotetia.

3. Superfícies Invariantes em $M^2 \times \mathbb{R}$

Neste seção estudaremos propriamente as superfícies invariantes por isometrias de $M^2 \times \mathbb{R}$, com foco em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Considerando, então, que \mathbf{g}_{M^2} e $\mathbf{g}_\mathbb{R}$ são as métricas de M^2 e \mathbb{R} , respectivamente, temos que $(M^2 \times \mathbb{R}, \bar{\mathbf{g}})$ é uma variedade riemanniana, onde $\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{g}_{M^2} + \mathbf{g}_\mathbb{R}$. Pela notação de diferencial, temos $ds^2 = \lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2) + dt^2$, com

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } M^2 = \mathbb{R}^2 \\ \frac{2}{1-x^2-y^2}, & \text{se } M^2 = \mathbb{D} \\ \frac{1}{y}, & \text{se } M^2 = \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

Lema 0.10. Seja $f : M^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}$ um difeomorfismo. Se $f(x, y, t) = (f_1(x, y), f_2(t))$ com $f_1 \in \text{Isom}(M^2)$ e $f_2 \in \text{Isom}(\mathbb{R})$, então $f \in \text{Isom}(M^2 \times \mathbb{R})$.

A volta do lema acima, em geral, não é verdadeira. Contudo, o teorema abaixo nos garante que no caso de $M^2 = \mathbb{H}^2$ a recíproca é verdadeira, o que torna muito mais simples a caracterização das superfícies invariantes por isometrias de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Teorema 0.11. $f \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ se e somente se $f = (f_1, f_2)$, com $f_1 \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ e $f_2 \in \text{Isom}(\mathbb{R})$.

Nas classificações seguintes, consideramos as isometrias de \mathbb{H}^2 como sendo as referentes à Proposição 0.9.

1. Superfícies Invariantes Por Rotações: Vamos considerar \mathbb{H}^2 com o modelo do disco de Poincaré. Agora, seja $\alpha : I \rightarrow \pi \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma curva p.p.c.a, onde $\pi = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}; y = 0\}$, dada por $\alpha(s) = (\text{tgh}(\frac{\rho(s)}{2}), 0, t(s))$.

Aplicando uma isometria hiperbólica elíptica em cada ponto de α , ou seja, uma rotação, obtemos a superfície invariante por rotações Σ em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada por:

$$X(w, s) = (\text{tgh}(\frac{\rho(s)}{2})\cos(w), \text{tgh}(\frac{\rho(s)}{2})\sen(w), t(s)), \quad s \in I, w \in (0, 2\pi].$$

Chamamos α por **curva geratriz** de Σ .

2. Superfícies Invariantes Por Translações Parabólicas: Nesse caso, vamos considerar \mathbb{H}^2 no modelo do semiplano superior. Então, seja $\alpha : I \rightarrow \pi \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma curva p.p.c.a definida por $\alpha(s) = (0, \rho(s), t(s))$, onde $\pi = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}; x = 0\}$.

Aplicando uma isometria parabólica em cada ponto de α , ou seja, uma translação horizontal, obtemos a superfície invariante por translação hiperbólica Σ parametrizada por:

$$X(w, s) = (w, \rho(s), t(s)), \quad s \in I, w \in \mathbb{R}.$$

3. Superfícies Invariantes Por Translações Hiperbólicas: Aqui também consideraremos \mathbb{H}^2 no modelo do semiplano superior. Isometrias hiperbólicas são homotetias, então nesse caso consideremos $\alpha : I \rightarrow \pi \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ p.p.c.a, $\alpha(s) = (\cos(\rho(s)), \text{sen}(\rho(s)), t(s))$, onde $\pi = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}; x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y = 0\}$.

Aplicando em cada slice (cópia de \mathbb{H}^2) uma translação hiperbólica sobre α obtemos uma superfície invariante por translação hiperbólica Σ parametrizada por:

$$X(w, s) = (w \cos(\rho(s)), w \sen(\rho(s)), t(s)), \quad s \in I, w \in \mathbb{R}_+^*.$$

4. Resultados Finais

Finalmente, trataremos dos resultados finais referentes às superfícies invariantes por isometrias de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Usando o software *Mathematica*, conseguimos desenvolver algoritmos que nos fornecem as principais propriedades geométricas de uma superfície invariante por qualquer das isometrias do ambiente que vimos: suas formas fundamentais e suas curvaturas principais.

No próximo resultado foi obtido uma classificação das superfícies que fazem um ângulo constante com uma direção pré fixada. Mais especificamente, obtemos que tais superfícies são invariantes pelas isometrias que estudamos.

Teorema 0.12. Uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é uma superfície com ângulo constante se, e somente se, é localmente isométrica a uma das seguinte superfícies:

1. $\phi_1 : S \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com

$$\phi_1(u, v) \left(\cos \theta \frac{\text{tgh}(u \cos \theta + p(v))}{r(v)} + q(v), \frac{\cos \theta}{r(v) \cosh(u \cos(\theta) + p(v))}, u \sen \theta \right)$$

onde p, q e r são funções integrais satisfazendo algumas determinadas condições² e $r \neq 0$,

2. $\phi_2 : S \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com

$$\phi_2 = (v, e^{\mp u \cos \theta}, u \sen \theta).$$

Teorema 0.13. Seja Σ uma superfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Nessa condição temos que Σ é uma superfície invariante por uma das três isometrias apresentadas nas subseções anteriores.

5. Apoio Financeiro

Este projeto contou com o apoio financeiro da CNPq.

6. Bibliografia

Referências

- [1] R. S. Earp; E. Toubiana. *Introduction à la Géométrie Hyperbolique et aux Surfaces de Riemann*. Cassini, Paris, 2009.
- [2] L. Q. M. Ramalho. *Superfícies com Ângulo Constante em $M^2 \times \mathbb{R}$* . Dissertação de mestrado. 2020.
- [3] A. Cambraia Jr; A. Folha; C. Peñafiel. *On Totally umbilical surfaces in the warped product $M(\kappa)_f \times \mathbb{R}$* . Pacific Journal of Mathematics. 2019.