Simpósio de Integração Acadêmica

"Bicentenário da Independência: 200 anos de ciência, tecnologia e inovação no Brasil e 96 anos de contribuição da UFV"

SIA UFV 2022

UFV Universidade Federal de Viçosa

Números naturais em topos

Joice Silva - Departamento de Matemática - Universidade Federal de Viçosa - joice.graziele@ufv.br
Rogério Picanço - Departamento de Matemática - Universidade Federal de Viçosa - rogerio@ufv.br
Trabalho de pesquisa - Teoria de Categorias - Álgebra
PICME - Programa de Iniciação Cienfífica e Mestrado
Palavras-chave: Teoria de topos, objeto número natural, categorias.

1. Introdução

Em **1889**, Guiseppe Peano apresentou em *Arithmetica Principia Nova Methodo Exposita* pela primeira vez, uma construção axiomática dos números naturais. Uma das primeiras consequências destes axiomas é a infinitude do conjunto $\mathbb{N}$, o que significa, de antemão, assumir a existência de um conjunto infinito. Na década de 1940, Eilemberg e Mac Lane introduzem a teoria de categorias no contexto da topologia algébrica. Diferente da teoria de conjuntos, onde os conceitos são definidos sobre elementos dentro de um conjunto, a teoria de categorias trata de morfismos, ou seja, as relações entre os objetos definem suas propriedades. No mesmo período, de forma independente, Lawvere, em colaboração com Tierney, introduz o conceito de *Topos Elementar*, no contexto da lógica, de certa forma generalizando topos de Grothendieck.

2. Objetivos

Nos dias atuais, alguns trabalhos tem sido feitos visando uma unificação da matemática pela teoria de topos. Assim, surge a questão de obter uma caracterização da teoria de conjuntos dentro da teoria de topos. Dito isso, Lawvere introduz o conceito de número natural em um topos, reproduzindo os axiomas de Peano em linguagem categórica, conseguinte, introduziremos uma construção dos números naturais em termos de topos.

3. Resultados

Definição: Dada uma categoria $\mathcal{C}$, diremos que ela é um *topos elementar* $\mathcal{E}$, se for finitamente completa, finitamente co-completa, exponencial e possuir objeto classificador Ω.

Teorema da Recursão: Dado $(\mathbf{X}, x, g)$, donde $\mathbf{X} \in$ *Sets*, $x \in \mathbf{X}$ e $g : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, existe uma única função $f : \mathbb{N} \to \mathbf{X}$ tal que $f(0) = x$ e $(g \circ f)(n) = (f \circ s)(n)$, ou seja, que faz o seguinte diagrama ser comutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{X} \arrow[r, "g"'] & \mathbf{X} \end{tikzcd}$$

Definição: *(Lawreve)* Um *objeto número natural* em um topos $\mathcal{E}$ é um objeto $\mathbb{N}$, com as setas $\mathbf{1} \xrightarrow{0} \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$ tal que para todo diagrama $\mathbf{1} \xrightarrow{x} X \xrightarrow{u} X$ em $\mathcal{E}$, existe um único morfismo $\mathbb{N} \xrightarrow{f} X$ tal que o diagrama a seguir comute.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "x"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "s"] \arrow[d, dotted, "f"] & \mathbb{N} \arrow[d, dotted, "f"] \\ & X \arrow[r, "u"'] & X \end{tikzcd}$$

Teorema 2: Em um topos $\mathcal{E}$, se um objeto $\mathbb{N}$ tem um morfismo $z : \mathbf{1} \to \mathbb{N}$ e $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que o diagrama $\mathbf{1} \xrightarrow{z} \mathbb{N} \xleftarrow{s} \mathbb{N}$ é um coproduto e tal que $\mathbb{N} \underset{s}{\overset{id_{\mathbb{N}}}{\rightrightarrows}} \mathbb{N} \to \mathbf{1}$ é um coequalizador, então $\mathbb{N}$ é um objeto número natural em $\mathcal{E}$.

Definição: Assumindo agora que $\mathbb{N}$ é um objeto número natural de uma categoria $\mathcal{C}$ com coprodutos binários, definimos o endofuntor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ por $TX := \mathbf{1} \amalg X$ para os objetos X e para os morfismos f, $Tf := [id_1, f]$.

Teorema 3: Seja $\mathcal{C}$ uma categoria cartesiano fechado e seja $\mathbb{N}$ um objeto número natural em $\mathcal{C}$. Então para cada $A, B \in \mathcal{C}_0$ com $g \in \mathcal{C}(A, B)$ e $h \in \mathcal{C}(A \times \mathbb{N} \times B, B)$, existe um único morfismo $f : A \times \mathbb{N} \longrightarrow B$ que faz os diagramas a seguir, comutarem em $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} A \times \mathbf{1} \arrow[r, "id_A \times 0"] & A \times \mathbb{N} \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \times \mathbb{N} \arrow[d, "f"] & A \times \mathbb{N} \arrow[l, "id_A \times 0"'] \arrow[d, "<id_{A\times\mathbb{N}}, f>"] \\ B & A \times \mathbb{N} \times B \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

Usando o teorema anterior, definimos os morfismos adição e multiplicação em um objeto número natural $\mathbb{N}$ recursivamente, donde $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ são os únicos morfismos que fazem os seguintes diagramas comutarem

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \times \mathbf{1} \arrow[r, "id_{\mathbb{N}} \times 0"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "+"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[l, "id_{\mathbb{N}} \times s"'] \arrow[d, "<id_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, +>"] \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, equal] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[l, "s \circ \pi_3"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \times \mathbf{1} \arrow[r, "id_{\mathbb{N}} \times 0"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "\cdot"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[l, "id_{\mathbb{N}} \times s"'] \arrow[d, "<id_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, \cdot>"] \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "0 \circ !_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[l, "s \circ \pi_3"] \end{tikzcd}$$

Com estes diagramas, é possivel mostrar todas as propriedades da soma e da multiplicação.

4. Conclusão

Temos que a categoria de conjuntos fica então caracterizada como um topos com o axioma da escolha (uma seção $\mathbf{1} \to X$, para cada objeto X) e um objeto número natural. Além disso, obtemos uma aritmética num Topos. Resta a questão de caracterizar o conceito de infinito em um topos, que será tratado no prosseguimento do trabalho.

5. Bibliografia

[1] R.P. KOSTECKI. *Categories of Sheaves.* Cambridge University Press, Département de Mathémattique, Université Cathilique de Louvain, encyclopedia of mathematics ans its applications, 52 edition, 1994.

[2] R.P. KOSTECKI. *An introduction to Topos theory.* Institute of Theoritical Physics, University of Warsaw, Warszawa, Poland, 2011.

[3] S. MAC LANE. *Categories for the Working Mathematucian.* SpringerVelag, New york, 2 edition, 1971.

6. Apoio

CNPq