Simpósio de Integração Acadêmica
"Bicentenário da Independência: 200 anos de ciência, tecnologia e inovação no Brasil e 96 anos de contribuição da UFV"
SIA UFV 2022

UFV
Universidade Federal de Viçosa

Álgebra Linear como ferramenta para a Programação Linear e o Método Simplex

Lídio Antônio de Oliveira Júnior – Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas UFV Campus Rio Paranaíba (IEP)

Pesquisa

Programação Linear; Simplex; Otimização

SCAN ME

Introdução

Os fundamentos teóricos deste trabalho foram construídos a partir de uma revisão bibliográfica das ferramentas teóricas da Álgebra Linear e da Topologia dos Espaços Métricos, a destacar: o conceito de métrica de um espaço; ponto de aderência; espaços métricos fechados e abertos; o conceito conjunto compacto; dentre outros. Diante disso foi possível compreender a demonstração de alguns teoremas relacionados a área da Programação Linear e resolver problemas de otimização (maximização e minimização) por intermédio do Método Simplex. Um problema de programação linear (PPL) consiste em minimizar uma função (função objetiva)

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

onde os coeficientes c_j são constantes pertencentes ao conjunto dos números reais e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ são as variáveis da função Q com $n \geq 1$ sujeito a um conjunto de m restrições da forma

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \text{ onde } b_i \geq 0 \, (i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geq 0 \, (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

onde os primeiros conjuntos de equações são as restrições do PPL e o segundo é a condição de não negatividade. As restrições determinam um conjunto de soluções viáveis que é um conjunto limitado e convexo e as soluções estão no(s) vértice(s) desse conjunto. A solução viável que otimiza (maximiza ou minimiza) a função objetiva é a chamada solução ótima. O método que usamos, em nosso trabalho, para encontrar uma solução ótima de um PPL foi o método simplex, que consiste na determinação de soluções viáveis básicas.

Objetivos

Compreender as bases da Álgebra Linear e da Topologia dos espaços métricos fundamentais para o estudo da Programação Linear, a destacar: os conceitos de métrica de um espaço; ponto de aderência; espaços métricos fechados e abertos; o conceito conjunto compacto; dentre outros. Posteriormente, explorar alguns problemas aplicados.

Material e Métodos

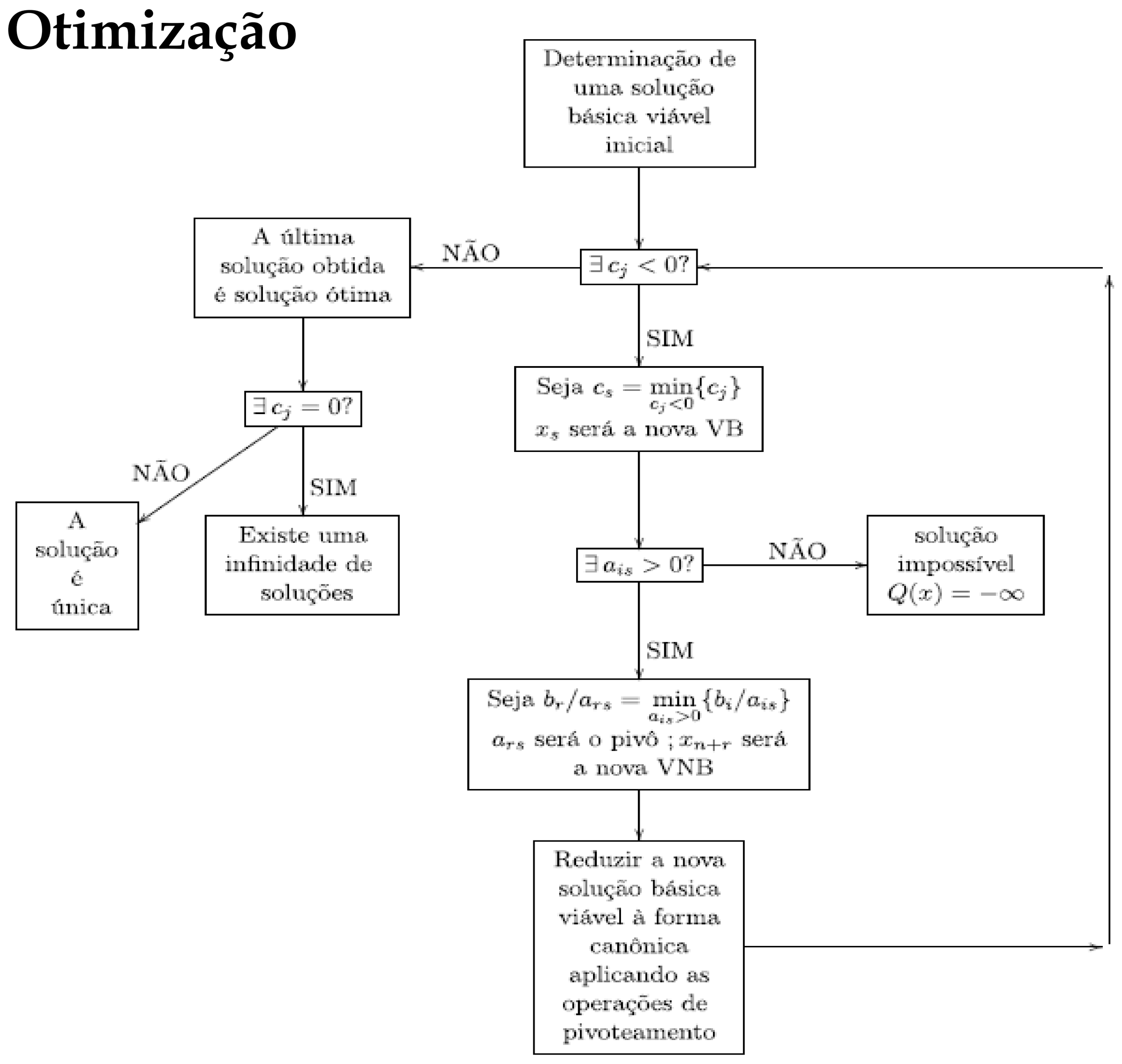
Por intermédio de estudos dirigidos vinculados a reuniões semanais com o orientador, sucedeu-se a elaboração metodológica e cronológica do projeto de pesquisa e posteriormente sua execução.

Dessa maneira, os assuntos a serem investigados eram indicados previamente e discutidos após um determinado período de tempo, no qual eram realizados os estudos individuais e resolução de exercícios.

Resultados e Discussão

O algoritmo Simplex e sua aplicação são bem extensos, por isso o conteúdo abaixo está de forma sucinta e para melhor compreensão basta scanear o QR code presente no painel.

Abaixo segue o fluxograma do Método Simplex para minimização de um PPL:



Conclusões

Através desse algoritmo é possível solucionar problemas de otimização em diversas áreas do conhecimento. A título de exemplo segue um PPL abaixo:

"Uma fábrica utiliza carvão, óleo e gás para produzir eletricidade. Admita que cada tonelada de carvão produz 600 quilowatts-hora, emite 20 unidades de dióxido de enxofre, 15 unidades de partículas poluentes e custa 200 unidades monetárias; cada tonelada de óleo produz 550 quilowatts-hora, emite 18 unidades de dióxido de enxofre, 12 unidades de partículas poluentes e custa 220 unidades monetárias; cada tonelada de gás produz 500 quilowatts-hora, emite 15 unidades de dióxido de enxofre, 10 unidades de partículas poluentes e custa 250 unidades monetárias. A agência de proteção ambiental restringe a emissão diária de dióxido de enxofre a não mais do que 60 unidades e não mais do que 75 unidades de partículas poluentes. Se a fábrica de eletricidade quer gastar não mais do que 2000 unidades monetárias ao dia com combustível, quanto combustível de cada tipo deverá ser comprado para maximizar a quantidade de energia gerada?"

Resolvendo o PPL, tem-se que queremos minimizar a função objetivo $Q(x) = -Z(x) = -600x_1 - 550x_2 - 500x_3$ sujeito às restrições:

$$\begin{cases} 20x_1 + 18x_2 + 15x_3 + x_4 = 60 \\ 15x_1 + 12x_2 + 10x_3 + x_5 = 75 \\ 200x_1 + 220x_2 + 250x_3 + x_6 = 2000 \end{cases}$$

e as restrições de não negatividade: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$.

Aplicando o algoritmo Simplex chegamos ao quadro onde encontramos a solução ótima, pois, os coeficientes das variáveis não básicas na função objetiva são positivos.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$b_i, i = 1,2,3$
x_3	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{1}{15}$	0	0	$4(L_1'')$
x_5	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{-2}{3}$	1	0	$35(L_2'')$
x_6	$\frac{-400}{3}$	-80	0	$\frac{-50}{3}$	0	1	$1000(L_3'')$
	$\frac{200}{3}$	50	0	$\frac{100}{3}$	0	0	$Q(x) + 2000(L_4'')$

Portanto, devem ser usadas 4 toneladas de gás, sem carvão nem petróleo; a energia máxima gerada é de 2000 quilowatts-hora.