Simpósio de Integração Acadêmica

"Bicentenário da Independência: 200 anos de ciência, tecnologia e inovação no Brasil e 96 anos de contribuição da UFV"

SIA UFV 2022

UFV Universidade Federal de Viçosa

IDENTIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS:
Da definição à automatização

Maxiel Alves de Oliveira - Universidade Federal de Viçosa.
Edson José Teixeira - Universidade Federal de Viçosa.

Quádricas, classificação, software maxima.

Introdução

Uma superfície quádrica é uma superfície que seus pontos podem ser descritos por meio de uma equação quadrática nas variáveis x, y e z, cujos coeficientes são reais e os coeficientes dos quadrados de x, y e z não são todos nulos. Os coeficientes dos termos mistos estão associados a uma rotação, enquanto os coeficientes dos termos de primeiro grau a uma translação da quádrica. Caso algum destes coeficientes seja não nulo, a quádrica está rotacionada e/ou transladada e sua identificação, em geral, não é imediata.

Objetivos

- Identificar superfícies quádricas, utilizando ferramentas tanto de Álgebra Linear, quanto de Geometria Analítica;
- Fazer a implementação computacional da identificação de uma superfície quádrica, por meio de sua equação na forma geral.

Material e Métodos

A dissertação de Mestrado Profissional "Superfícies Quádricas. Transformação das Coordenadas.", referência 2, foi base para pesquisa, sendo realizada uma leitura e demonstração dos cálculos de todos os conceitos e resultados trabalhados. As outras referências foram estudadas em paralelo para melhor compreensão. Após isso, foi utilizado o *software* livre *Maxima* para a implementação computacional.

Identificação de superfícies quádricas utilizando ferramental de Geometria Analítica

Dada a equação de uma quádrica da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0 \tag{1}$$

é calculado o determinante

$$\begin{vmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{vmatrix}.$$

Caso o determinante acima seja não nulo, a quádrica é central. Caso contrário, a quádrica é chamada não central.

Ao lidarmos com uma quádrica central, realizamos primeiramente uma translação, por meio do sistema

$$\begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g/2 \\ -h/2 \\ -i/2 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, a equação (1) se reduz a

$$a_1x_1^2 + b_1y_1^2 + c_1z_1^2 + d_1x_1y_1 + e_1x_1z_1 + f_1y_1z_1 + j_1 = 0.$$

A equação característica de (1) é dada por

$$\begin{vmatrix} (a_1-\lambda) & \frac{d_1}{2} & \frac{e_1}{2} \\ \frac{d_1}{2} & (b_1-\lambda) & \frac{f_1}{2} \\ \frac{e_1}{2} & \frac{f_1}{2} & (c_1-\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 as raízes da equação característica. Substituindo λ_1 em

$$\begin{cases} (a_1-\lambda)l + \frac{d_1}{2}m + \frac{e_1}{2}n = 0 \\ \frac{d_1}{2}l + (b_1-\lambda)m + \frac{f_1}{2}n = 0 \\ \frac{e_1}{2}l + \frac{f_1}{2}m + (c_1-\lambda)n = 0, \end{cases}$$

obtemos $\overrightarrow{p_1} = (l_1, m_1, n_1)$, direção principal associada à raíz λ_1. Escolha a solução de tal forma que $\| \overrightarrow{p_1} \| = 1$. Do mesmo modo obtemos $\overrightarrow{p_2} = (l_2, m_2, n_2)$ e $\overrightarrow{p_3} = (l_3, m_3, n_3)$, direções principais correspondentes às raízes λ_2 e λ_3, respectivamente. As direções principais devem ser perpendiculares duas a duas e possuir norma igual a um.

Agora é feita uma rotação com $\overrightarrow{i'} = \overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{j'} = \overrightarrow{p_2}$ e $\overrightarrow{k'} = \overrightarrow{p_3}$, por meio da equação de rotação, ou seja,

$$\begin{cases} x_1 = l_1x_2 + l_2y_2 + l_3z_2 \\ y_1 = m_1x_2 + m_2y_2 + m_3z_2 \\ z_1 = n_1x_2 + n_2y_2 + n_3z_2. \end{cases}$$

Como $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ e $\overrightarrow{p_3}$ são direções principais, a equação (1) se reduz a sua forma mais simples

$$\lambda_1x_2^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3z_2^2 + j_2 = 0.$$

Uma quádrica central pode ser um ponto, um cone duplo, um elipsóide, um hiperbolóide de uma ou duas folhas ou o conjunto vazio, a depender dos sinais de λ_1, λ_2, λ_3 e j_2.

Em uma quádrica não central, a rotação é realizada primeiramente, da forma que foi apresentada acima. Em seguida a translação é feita pelo completamento de quadrados, a fim de obter uma equação da forma

$$\lambda_1x_2^2 + h_2y_2 + i_2z_2 + j_2 = 0.$$

Uma quádrica não central pode ser uma reta, um plano, dois planos paralelos, dois planos que se interceptam, um cilindro elíptico, um cilindro hiperbólico, um cilindro parabólico, um parabolóide elíptico, um parabolóide hiperbólico ou o conjunto vazio, a depender dos sinais de λ_1, λ_2, $\imath_2$ e j_2.

Identificação de superfícies quádricas utilizando ferramental de Álgebra Linear

Podemos escrever a equação (1) utilizando matrizes como

$$X^TAX + GX + \begin{bmatrix} j \end{bmatrix} = 0.$$

Como A é simétrica, ela pode ser diagonalizada ortogonalmente, ou seja, existem matrizes P e D tais que $D = P^TAP$. Neste caso, teremos $P^{-1} = P^T$.

As matrizes P e D são dadas por $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ e $P^T = P$, nas quais v_1, v_2 e v_3 são os autovetores ortonormais associados aos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3, respectivamente.

Após a diagonalização, a translação é feita pelo completamento de quadrados, quando necessária, a fim de obter a equação (1) em sua forma mais simples.

Conclusões

Desse modo, o estudo de quádricas é uma forma de aprimorar o senso crítico e formalização de conceitos matemáticos através de encadeamento de ideias e raciocínio lógico dedutivo. Além disso, a implementação computacional permitiu automatizar a identificação de quádricas, promovendo uma economia de tempo e esforço.

Bibliografia

[1] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. Um Curso de Álgebra Linear. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2007.

[2] CORREIA, J. M. Superfícies Quádricas. Transformação das Coordenadas. Rio Claro, 2010. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91150/correia/_jm/_me/_rcla.pdf;jsessionid=772183287A03EA003C8407A35F36C474?sequence=1. Acesso em: 01 de fevereiro de 2022.

[3] RIOS, I. L.; FIGUEIREDO, L. M.; CUNHA, M. O. da. Álgebra Linear I. Volume 1. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2015. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/recurso/5177. Acesso em: 01 de fevereiro de 2022.

[4] FIGUEIREDO, L. M.; CUNHA, M. O. da. Álgebra Linear I. Volume 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2015. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/recurso/6485. Acesso em: 01 de fevereiro de 2022.

[5] BEDOYA, H.; CAMELIER, R. Álgebra Linear II. Volume 1. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2015. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/recurso/5180. Acesso em: 01 de fevereiro de 2022.

[6] BEDOYA, H.; VILLELA, M. L. T.; CAMELIER, R. Álgebra Linear II. Volume 2. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2015. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/recurso/6486. Acesso em: 01 de fevereiro de 2022.

Apoio Financeiro

Este projeto contou com apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).