Simpósio de Integração Acadêmica
"Bicentenário da Independência: 200 anos de ciência, tecnologia e inovação no Brasil e 96 anos de contribuição da UFV"
SIA UFV 2022
UFV Universidade Federal de Viçosa

INTEGRAL DE LEBESGUE: UMA BREVE INTRODUÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA - CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Giovana Sgamatti Ribeiro - giovana.ribeiro@ufv.br e Luciana Maria Mendonça Bragança - mendonca@ufv.br

Integral de Lebesgue, medida, funções mensuráveis.
Análise - Matemática

1. Introdução

A teoria de medida e integração é uma importante ferramenta desenvolvida pelos matemáticos Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), Félix Édouard Justin Émile Borel(1871-1956) e Henri Léon Lebesgue (1875-1941) no século XIX, quando os matemáticos passaram a se preocupar com a fundamentação da matemática. Nessa época, foram encontradas diversas funções que não podiam ser integradas à Riemann, o que deu início a integração de Lebesgue: um modelo de integração que generaliza a integral de Riemann e que é amplamente explorado na resolução de equações diferenciais parcias em diversas áreas da matemática aplicada, como a engenharia e a física.

2. Objetivos

O objetivo deste trabalho é apresentar os principais resultados da teoria de medida e integração, como o Lema de Fatou, o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Ademais, explicitaremos o comparativo do modelo de integração de Riemann e Lebesgue através da integração da função de Dirichlet.

3. Material e Métodos

No desenvolvimento desse trabalho os resultados apresentados no livro "The Elements of Integration and Lebesgue Measure", referência [1], foram estudados por meio de discussões e apresentações semanais junto à orientadora.

4. Funções Mensuráveis

Definição 0.1. *Uma família $\sigma(X)$ de subconjuntos de um conjunto X é chamada de $\sigma-$álgebra quando satisfaz:*

(i) $X, \emptyset \in \sigma(X)$.;

(ii) Dado $A \in \sigma(X)$ o complementar de A pertence a $\sigma(X)$;

(iii) Se (A_n) é uma sequência de conjuntos em $\sigma(X)$, então a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pertence $\sigma(X)$.

Definição 0.2. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é denominada **X-mensurável** ou simplesmente **mensurável** se para cada número real α o conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ pertencer a $\sigma(X)$*

5. Medida

Definição 0.3. *Medida é uma função denotada por μ de valores reais extendidos definida em uma σ-álgebra X de subconjunto de X tais que*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(E) \geq 0$ para todo conjunto $E \in \sigma(X)$

(iii) μ possui a propriedade de ser aditivo contável, ou seja, se (E_n) é uma sequência disjunta de conjuntos em $\sigma(X)$ então

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Lema 0.4. *Seja μ uma media definida em $\sigma(X)$.*

(a) Se (E_n) é uma sequência crescente em $\sigma(X)$, então $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim \mu(E_n)$.

(b) Se (F_n) é uma sequência decrescente em $\sigma(X)$ e se $\mu(F_1) < +\infty$, então

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\Big) = \lim \mu(F_n).$$

Definição 0.5. *Um espaço de medida é uma tripla $(X, \sigma(X), \mu)$ em que X é um conjunto, $\sigma(X)$ é uma σ-álgebra de X e μ é uma medida em $\sigma(X)$.*

Se existe um subconjunto $N \in \sigma(X)$ com medida nula tal que uma certa proposição é satisfeita no complementar de N, então diz-se que a medida μ é quase toda parte em relação a essa proposição e denota-se por μ-q.t.p.. Dessa forma, diz-se que duas funções f e g são iguais em quase toda parte quando $f(x) = g(x)$ para todo $x \notin N$, para algum $N \in \sigma(X)$ com $\mu(N) = 0$ e denota-se $f = g$, μ - q.t.p.. De forma análoga, diz-se que uma sequência (f_n) de funções em $\sigma(X)$ converge em quase toda parte se existe um conjunto $N \in \sigma(X)$ com $\mu(N) = 0$ tal que $f(x) = \lim f_n(x)$ para $x \notin N$. e denota-se $f = \lim f_n$, μ − q.t.p.

Definição 0.6. *Se $\sigma(X)$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de um conjunto X, então uma função real λ definida em $\sigma(X)$ é dita uma medida com sinal quando satisfaz*

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$

(ii) Se (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\sigma(X)$, então

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

6. Funções Integráveis

Definição 0.7. *Uma função de valores reais é simples se assume apenas um número finito de valores. Uma função φ é mensurável simples se pode ser representada como*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j} \tag{1}$$

onde os $a_j \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{X}_{E_j}$ é a função característica do conjunto $E_j \in \sigma(X)$.

Definição 0.8. *Seja φ uma função simples pertencente a M^+ com a representação padrão. A integral de φ com respeito a medida μ definida por*

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Teorema 0.9 (Teorema da Convergência Monótona). *Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X, \sigma(X))$ que convergem para f, então*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Lema 0.10 (Lema de Fatou). *Se (f_n) pertence a $M^+(X, \sigma(X))$, então*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

7. Integral

Definição 0.11. *A coleção de funções integráveis $L = L(X, \sigma(X), \mu)$ de funções integráveis consiste em funções $\sigma(X)$-mensuráveis de valores reais definidas em X tais que as partes positiva e negativa de f tem integrais finitas com respeito a μ. Em outras palavras, quando $\int f^+ d\mu < +\infty$ e $\int f^- d\mu < +\infty$ define-se a integral de f como*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Mais ainda, se E é um conjunto pertencente a $\sigma(X)$, então a integral de f em E com respeito a μ é definida por

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Lema 0.12. *Seja $f \in L$. Se $\lambda : \sigma(X) \to \mathbb{R}$ é uma função definida por $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ então λ é uma medida com sinal.*

Definição 0.13. *A função λ definida no lema acima é denominada integral indefinida de f com respeito a μ. Além disso, λ é uma medida com sinal, assim a integral indefinida de uma função em L é contável aditiva, isto é, se (E_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\sigma(X)$ tais que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, então*

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Teorema 0.14. *Uma função mensurável f pertence a L se, e somente se, $|f|$ pertence a L. Nesse caso, $\Big|\int f d\mu\Big| \leq \int |f| d\mu$.*

Teorema 0.15. *A multiplicação αf em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e a soma $f + g$ em L pertencem a L, isto é,*

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu \quad e \quad \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

O teorema da convergência dominada de Lebesgue é uns dos principais resultados desta apresentação, pois ele permitirá afirmar que uma função mesurável é integrável quando esta for o limite de uma sequência de funções integráveis dominada por uma função integrável g, em outras palavras

Teorema 0.16 (Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge em quase toda parte para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

8. Riemann x Lebesgue

Finalmente, será feito um comparativo entre a integral de Riemann e a integral de Lebesgue por meio da função de Dirichlet, que é integrável à Lebesgue e não à Riemann. Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases} \tag{2}$$

Se P é uma partição qualquer de [0,1], essa partição possui números racionais e irracionais. Então a soma inferior de f relativa à partição P vale 0, enquanto a soma superior vale 1. Consequentemente, a integral inferior de f vale 0 e a superior vale 1. Assim, a integral de Riemann $\int_0^1 f(x)dx$ não existe.

Por outro lado, como a medida de Lebesgue de um conjunto enumerável é nula e $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ é enumerável, segue que a função f é nula, exceto no conjunto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ que tem medida nula. Portanto, a integral de Lebesgue de f vale 0, ou seja, f é integrável à Lebesgue, embora não seja integrável à Riemann.

9. Conclusões

Henri Lebesgue desenvolveu uma nova integral em que o foco é a imagem da função e não o domínio, como na integral de Riemann. A medida de Lebesgue generaliza os conceitos de comprimento na reta, área no plano, volume no espaço e está definida para uma ampla família de subconjuntos denominados σ-álgebra.

A integral de Lebesgue é a generalização do conceito de integral de Riemann e apresenta diversas vantagens em relação à integral de Riemann, sobretudo em relação à convergência. Com efeito, não exitem versões à Riemann de teoremas como o Teorema da Convergência Monótona, Teorema da Convergência Dominada e o Lema de Fatou, apresentados neste trabalho.

Concluindo, a integral de Lebesgue permite integrar funções que não possuem nenhum ponto de descontinuidade, como visto no exemplo apresentado.

10. Apoio Financeiro

Este projeto contou com o apoio financeiro da CNPq.

11. Referências Bibliográficas

[1] BARTLE, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley Sons, 1975.

[2] CANCELIER G., *Uma introdução à Teoria de Medida e Integração*, Universidade Federal de Santa Catarina, 2019.