Simpósio de Integração Acadêmica

"Bicentenário da Independência: 200 anos de ciência, tecnologia e inovação no Brasil e 96 anos de contribuição da UFV"

SIA UFV 2022

UFV Universidade Federal de Viçosa

INTEGRAL DE LEBESGUE E APLICAÇÕES

Ana Paula Morito Neves - Universidade Federal de Viçosa, ana.morito@ufv.br.
Edson José Teixeira - Universidade Federal de Viçosa, edson.teixeira@ufv.br.

Medida exterior, Medida de Lebesgue, Integral de Lebesgue.

1. Introdução

A Teoria da Medida é um ramo da matemática que teve como principais desenvolvedores três matemáticos, a saber, Émile Borel, Henri Lebesgue e Constantin Carathéodory. Essa teoria consiste basicamente em associar uma medida (um número real positivo) a cada conjunto, de uma determinada família de subconjuntos, de um determinado espaço e definir uma teoria de integração para funções que assumem valores neste respectivo espaço. A Teoria da Medida é uma ferramenta essencial no estudo de equações diferenciais parciais, que constituem uma ferramenta importante na modelagem de problemas naturais. Além disso, é também muito aplicada em estatística, na probabilidade. Podemos estudar diferentes tipos de medidas, como a medida de contagem, medida de Lebesgue, de Hausdorff, entre outras.

2. Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo estudar a Medida e a Integral de Lebesgue no espaço Euclidiano de dimensão n, bem como algumas de suas aplicações.

3. Material e Métodos

A metodologia adotada consistiu em reuniões semanais com o orientador, onde foram discutidos os temas mais complexos do projeto. O livro texto utilizado nessa pesquisa se encontra na primeira referência. As demais referências citadas foram utilizadas como bibliografias complementares.

4. Revisão de literatura

A Medida de Lebesgue

Notação 1. *Indicamos por $\mathbb{R}$ a reta real, isto é, o conjunto dos números reais. Indicamos por $\overline{\mathbb{R}}$ a reta real estendida, ou seja, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, indicamos por $|a, b|$ qualquer um dos intervalos $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ e (a, b).*

Definição 2. *Se $J = |a, b|$, definimos o comprimento do intervalo J por $\ell(J) = b - a$, convencionando que $\ell(|\infty, \infty|) = \ell(|-\infty, -\infty|) = 0$.*

Definição 3. *Dados $a, b \in \overline{\mathbb{R}}^n$, escrevemos $a \leq b$ se $a_i \leq b_i$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e definimos $[a, b] = \prod_{1 \leq i \leq n} [a_i, b_i]$. Dessa forma, $|a, b| = \prod_{1 \leq i \leq n} |a_i, b_i|$, denominado paralelepípedo ou intervalo, indica qualquer um dos produtos de representantes de $|a_1, b_1|, \cdots, |a_n, b_n|$.*

Definição 4. *Se $J = |a, b| \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, o seu volume é definido por $\ell(|a, b|) = \prod_{1 \leq i \leq n} \ell(|a_i, b_i|)$, em que é convencionado que $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$.*

Definição 5. *Uma medida exterior, sobre um conjunto E, é uma função $\mu^* : \mathcal{P}(E) \to [0, \infty]$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\mu^*(\phi) = 0$

(ii) μ^* é subaditiva, ou seja, se $A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, então $\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

Definição 6. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos*

$$m^*(A) = m^*_\ell(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k); \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \supset A\right\}.$$

A função $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ é uma medida exterior, chamada de medida exterior de Lebesgue de dimensão n.

Agora, vamos generalizar a noção de área em $\mathbb{R}^2$ e volume em $\mathbb{R}^3$. Seja $J = |a, b| \subset \mathbb{R}^n$, em que $a, b \in \mathbb{R}^n$ com $a \leq b$. Então, $m^*(J) = \ell(J) = \prod_{1 \leq i \leq n} (b_i - a_i)$.

Definição 7. *Diremos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E), \mathcal{A} \neq \emptyset$ é uma σ-álgebra, sobre E, se valem as seguintes propriedades:*

i) Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in \mathcal{A}$.

ii) Se $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.

Definição 8. *Uma medida sobre um conjunto E é um par $(\mathcal{A}, \mu)$, em que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ é uma σ-álgebra e μ é uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\mu(\phi) = 0$

ii) μ é σ-aditiva, isto é, dados conjuntos $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$, dois a dois disjuntos temos $\mu\left(\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Definição 9. *Diremos que um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável, se para todo $X \subset \mathbb{R}^n$, temos $m^*(X) = m^*(X \cap M) + m^*(X \cap M^c)$.*

Notação 10. *Indicamos por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, ou simplesmente por $\mathcal{M}$, a classe de todos os subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 11. *Seja m^* a medida exterior de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$. Então*

i) A classe $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é uma σ-álgebra.

ii) A restrição m de m^* à σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é uma medida, chamada de medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

iii) Todo conjunto de medida exterior nula é mensurável.

Teorema 12. *i) Qualquer intervalo $J \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável.*

ii) Todo subconjunto aberto ou fechado de $\mathbb{R}^n$ é mensurável.

Funções Mensuráveis

Definição 13. *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável. Diremos que uma função $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável, se satisfaz uma das condições (equivalentes) a seguir:*

i) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in E; f(x) > \alpha\}$ é mensurável.

ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}([\alpha, +\infty])$ é mensurável.

iii) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{x \in E; f(x) < \alpha\}$ é mensurável.

iv) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $f^{-1}([-\infty, \alpha])$ é mensurável.

Teorema 14. *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável. Então toda função contínua $f : E \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

Definição 15. *Seja E um conjunto mensurável. Diremos que uma propriedade* **P** *vale quase sempre (q.s.), se os pontos de E para os quais* **P** *não está definida ou então para os quais* **P** *não vale, formam um conjunto de medida nula.*

A Integral de Lebesgue

Definição 16. *Dado um conjunto mensurável E, uma função simples $\phi : E \to \mathbb{R}$ é uma combinação linear finita de funções características de subconjuntos mensuráveis $E_1, \cdots, E_k$ de E, isto é, $\phi(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}(x)$, com $c_i \in \mathbb{R}$.*

Definição 17. *Se ϕ é uma função simples positiva, com representação canônica $\phi = \sum_{j=1}^{p} a_j \chi_{A_j}(x)$, definimos $\int_E \phi = \int_E \phi(x)dx = \sum_{j=1}^{p} a_j m(A_j)$, em que*

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$;

(ii) $a_i \neq a_j$, se $i \neq j$;

(iii) $E = \bigcup_{j=1}^{p} A_j$.

Teorema 18. *Sejam E um conjunto mensurável e uma função mensurável $f : E \to [0, +\infty]$. Existe uma sequência crescente de funções simples positivas $\phi_1 \leq \cdots \phi_n \leq \phi_{n+1}$, tal que $\sup_{k \in \mathbb{N}} \phi_k(x) = f(x)$.*

Notação 19. *Seja E mensurável. Denotamos por $S_+(E)$ o seguinte conjunto $S_+(E) = \{\phi : E \to \mathbb{R}_+;\ \phi$ é simples$\}$.*

Definição 20. *Seja $f : E \to [0, +\infty]$ uma função mensurável. Então*

$$\int_E f(x)dx = \sup\left\{\int_E \phi dx;\ \phi \in S_+(E) \text{ e } \phi \leq f\right\}.$$

Observação 21. *Sejam $f, g : E \to [0, +\infty]$ funções mensuráveis.*

i) Se $f = g$ q.s., então $\int_E f = \int_E g$.

ii) $f = 0$ q.s. se, e somente se, $\int_E f = 0$.

Lema 22 (Lema de Fatou)**.** *Se $f_k : E \to [0, \infty]$ é uma sequência de funções mensuráveis tal que $f_k \to f$ q.s, então $\int_E f \leq \varliminf_{k \in \mathbb{N}} \int_E f_k \leq \infty$.*

Teorema 23 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja $f_k : E \to [0, \infty]$ uma sequência de funções mensuráveis tais que $f_k \to f$ q.s., em que $f_k \leq f$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, $\int_E f = \lim_{k \to \infty} \int_E f_k \leq \infty$.*

Definição 24. *Seja E um conjunto mensurável e $f : E \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Diremos que f é integrável se $\int_E f < \infty$. Diremos que $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ é integrável se f_+ e f_- são integráveis e definimos $\int f = \int f_+ - \int f_-$.*

Teorema 25 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $f_k : E \to \overline{\mathbb{R}}$ uma sequência de funções mensuráveis tal que $f_k \to f$ q.s. e tal que existe $g \in \mathcal{L}_1(E)$, com $|f_k| \leq g$ q.s. Então existe $\lim_{k \to \infty} \int_E f_k = \int_E f$.*

5. Resultados

Dada uma função $\phi : X \times E \to \mathbb{R}$ para todo $x \in X$ e $t \in E$ escrevemos $\phi^x(t) = \phi_t(x) = \phi(x, t)$ e temos as funções $\phi^x : E \to \mathbb{R}$ e $\phi_t : X \to \mathbb{R}$.

Teorema 26. *Seja X um espaço métrico e E um conjunto mensurável. Seja $x_0 \in X$ e $\phi : X \times E \to \mathbb{R}$ tal que*

i) Para todo $x \in X$ a função ϕ^x é mensurável.

ii) Para quase todo $t \in E$ a função ϕ_t é contínua no ponto x_0.

iii) Existe $g \in \mathcal{L}_1(E)$ tal que $|\phi(x, t)| \leq g(t)$ para todo $x \in X$ e quase todo $t \in E$.

Então a função $x \in X \to \phi(x) = \int_E \phi(x, t)dt \in \mathbb{R}$ é contínua no ponto x_0.

Exemplo 27. *Seja $f_1 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in C^*(\mathbb{R}^n)$, isto é, $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é função contínua limitada. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ definimos*

$$(f_2 * f_1)(x) = [f_2(t) * f_1(t)](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_2(x - t) f_1(t) dt.$$

Então, $f_2 * f_1 \in C^*(\mathbb{R}^n)$ e $\|f_2 * f_1\| \leq \|f_2\| \|f_1\|_1$ em que, $\|h\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |h(x)|$ e $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| dt$.

$f_2 * f_1$ se denomina de produto de convolução de f_2 por f_1.

Aplicação 28. *Seja $u_0 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ defina*

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} ds.$$

Então a função u é contínua e para cada $\tau > 0$ ela é limitada em $\mathbb{R} \times [\tau, \infty)$.

Aplicação 29. *Seja $u_0 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Para todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ defina*

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) \frac{y}{(x - t)^2 + y^2} dt.$$

Então a função u é contínua e para cada $a > 0$ ela é limitada em $\mathbb{R} \times [a, \infty)$.

Definição 30. *Dado um aberto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e um inteiro m indicamos por $C^{(m)}(\Omega)$ o conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que para qualquer $p = (p_1, \cdots, p_n), p_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ com $|p| = p_1 + \cdots + p_n \leq m$ tem derivada*

$$D^p f = \frac{\partial^{|p|} f}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \cdots \partial x_n^{p_n}}$$

contínua (fazemos a convenção de que $D^0 f = f$). Quando, além disso, todas as $D^p f$ são limitadas, escrevemos $f \in C_*^{(m)}(\Omega)$. Escrevemos $f \in C^{(\infty)}(\Omega) \left[f \in C_*^{(\infty)}(\Omega)\right]$ se para todo inteiro m tivermos $f \in C^{(m)}(\Omega) \left[f \in C_*^{(m)}(\Omega)\right]$.

Exemplo 31. *Sejam $m \in \mathbb{Z}$ ou $m = \infty$, $f_1 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ e $f_2 \in C_*^{(m)}(\mathbb{R} \times (c, d))$, então $f_2 \underset{1}{*} f_1 \in C_*^{(m)}(\mathbb{R} \times (c, d))$ e $D^{|p|}(f_2 \underset{1}{*} f_1) = (D^p f_2) \underset{1}{*} f_1$ para $|p| \leq m$.*

Aplicação 32. *Seja $u_0 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ defina*

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} ds.$$

Então, $u \in C^{(\infty)}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ e u satisfaz a equação diferencial parcial $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, isto é, a equação do calor.

Aplicação 33. *Seja $u_0 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ definimos*

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) \frac{y}{(x - t)^2 + y^2} dt.$$

Então, $u \in C^{(\infty)}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ e u satisfaz a equação $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, isto é, u é uma função harmônica.

6. Conclusões

Foi possível, dentro deste projeto de Iniciação Científica, fazer algumas aplicações dos conceitos estudados. Isso permitiu a bolsista uma visão mais aplicada da matemática. Esse contato com as aplicações é, em geral, uma deficiência muito comum dos cursos de Graduação em Matemática, tanto no Bacharelado quanto na Licenciatura. Sendo assim, essa pesquisa propiciou uma complementação significativa na formação da bolsista.

7. Referências

HÔNIG, C. S. **A Integral de Lebesgue e suas Aplicações**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977. (11o Coloquio Brasileiro de Matemática) Disponível em: https://impa.br/publicacoes/coloquios/. Acesso em: 8 jun. 2021.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 9. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006. v. 2. (Projeto Euclides, v. 2).

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 12. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009. v. 1. (Projeto Euclides, v. 1).

ROYDEN, H. L. **Real Analysis**. 3. ed. New York: Macmillan Publishing Company, 1988.

8. Apoio Financeiro

Este projeto contou com apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).