Simpósio de Integração Acadêmica

"Bicentenário da Independência: 200 anos de ciência, tecnologia e inovação no Brasil e 96 anos de contribuição da UFV"

SIA UFV 2022

UFV Universidade Federal de Viçosa

Teoria do grau topológico de Leray-Schauder

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA - CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Paula Cupertino Costa Ribeiro - paula.cupertino@ufv.br Lais Moreira dos Santos - lais.msantos@ufv.br

Área temática: Análise - Grande área: Ciências exatas e tecnológicas - Categoria: Pesquisa.

Palavras-chave: Grau de Leray-Schauder, Teoremas de ponto fixo, Equações diferenciais.

1. Introdução

Modelos matemáticos para um grande número de problemas na ciência podem ser reduzidos ao desafio de encontrar soluções para equações da forma $\Phi(x) = p$. Em particular, equações diferenciais, equações integrais e equações integro-diferenciais podem ser formuladas desta maneira em espaços de dimensão infinita. Em um projeto anterior a este, discutimos sobre a teoria do grau de Brouwer, que é aplicável no estudo de equações da forma $\Phi(x) = p$, em que Φ é um operador definido em um espaço de dimensão finita . Nesse sentido, é natural buscarmos por uma extensão do grau topológico para espaços de dimensão infinita. Entretanto, em espaços de dimensão infinita, conjuntos limitados não são relativamente compactos. Como consequência desse fato, não é possível definir grau para operadores simplesmente contínuos. Este fato levou Jean Leray e Juliusz Schauder a mostrar, em 1934, que existe uma versão similar da teoria do grau em dimensão finita (Grau de Brouwer) para espaços de dimensão infinita. No estudo de equações diferenciais parciais e ordinárias, por exemplo, a teoria do grau de Leray-Schauder é uma importante ferramenta para se estabelecer resultados de existência de soluções e existência de continuum de soluções para problemas de autovalor. Nesse sentido, o foco deste trabalho é o estudo do grau de Leray-Schauder, suas principais propriedades e aplicações.

2. Objetivos

O objetivo deste projeto é apresentar o grau topológico de Leray-Schauder e exibir algumas de suas propriedades, dentre as quais destaco a propriedade de existência de solução, que relaciona o grau de uma aplicação Φ com a existência de soluções para a equação $\Phi(x) = p$, e a invariância homotópica, uma ferramenta que nos permite tirar conclusões sobre o grau de uma determinada função a partir do grau de funções mais simples que possam ser deformadas continuamente na primeira. Por fim, exploraremos aplicações do grau topológico. Dentre essas aplicações, discutiremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder e veremos como esse resultado nos auxilia a estabelecer resultados de existência de soluções para equações diferenciais ordinárias.

3. Metodologia

O desenvolvimento deste trabalho consistiu no estudo de livros e artigos relacionados ao tema proposto. Foram dedicadas 16 horas semanais para estudo do conteúdo estabelecido, sendo que 2 dessas horas foram usadas para discussões com a orientadora.

4. Resultados

Antes de apresentar a definição do grau de Leray-Schauder, vamos introduzir o conceito de operador compacto:

Definição 1 *Sejam V, X dois espaços vetorias normados e $D \subset V$. Dizemos que $T : D \to X$ é compacto se:*

1. T é contínuo;

2. $\overline{T(A)}$ é compacto, para todo $A \subset D$ limitado.

Definição 2 *(Grau de Leray-Schauder) Sejam $T : \overline{D} \to X$ compacto, $\Phi := I - T$ e $p \notin \Phi(\partial D)$. O grau de Leray-Schauder de Φ em p com respeito a D é definido pelo Grau de Brouwer $d(\overline{\Phi}, D_v, p)$, onde $\overline{\Phi} := I - \overline{T}$, com $\overline{T} : \overline{D} \to X$ sendo compacto, tal que $\|\overline{T}x - Tx\| < d_1(p, \Phi(\partial D))$, para todo $x \in \overline{D}$ e $\overline{T}$ é de dimensão finita, $D_v = D \cap V$ e V é qualquer subespaço vetorial de dimensão finita contendo p e $\overline{T}(\overline{D})$.*

A seguir apresentamos as principais propriedades do grau introduzido acima:

Teorema 1 *As seguintes afirmações são satisfeitas:*

1. (Normalização) $d(I, D, p) = 1$, para todo $p \in D$;

2. $d(I, D, p) = 0$, para todo $p \notin D$;

3. (Propriedade de solução) Se $d(I, D, p) \neq 0$, então existe $x \in D$ tal que $\Phi(x) = p$;

4. (Invariância sobre Homotopia) Assuma que $H : \overline{D} \times [0, 1] \to X$ é uma homotopia de operadores compactos em $\overline{D}$. Defina $\Phi_t := I - H(\cdot, t)$, $t \in [0, 1]$ e assuma que $p \notin \Phi_t(\partial D)$, para todo $t \in [0, 1]$. Então $d(\Phi_t, D, p)$ é independente de t.

O item 3 do teorema anterior é conhecido como propriedade de solução, e garante que se $d(I, D, p) \neq 0$ então a equação $\Phi(x) = p$ tem pelo menos uma solução em D. Já o item 4 nos permite tirar conclusões sobre o grau de uma determinada função a partir do grau de funções mais simples que possam ser deformadas continuamente na primeira.

Teorema 2 *(Teorema do ponto fixo de Schauder) Sejam D um subconjunto aberto, limitado e convexo de um espaço de Banach X, tal que $0 \in D$ e $T : \overline{D} \to X$ é compacto, com $T(\overline{D}) \subset \overline{D}$. Então T tem um ponto fixo em $\overline{D}$, isto é, existe $x \in \overline{D}$ tal que $T(x) = x$.*

Demonstração: *Sem perda de generalidade, assuma que*

$$T(x) \neq x, \quad para \quad todo \quad x \in \partial D, \tag{1}$$

caso contrário, não haveria nada a ser provado. Nesse caso, podemos definir o grau $d(I - T, D, 0)$, restando assim provar que $d(I - T, D, 0) \neq 0$. Para isso, defina

$$H(x, t) := tT(x), t \in [0, 1], x \in \overline{D} \quad e \quad \Phi_t(x) := \Phi(x, t) = x - tT(x).$$

Claramente, H é uma homotopia de operadores compactos.

Afirmação: *$\Phi_t(x) \neq 0$, para todo $(x, t) \in [0, 1] \times \partial D$.*

De fato, suponha por hipótese de contradição que existam $x_0 \in \partial D$ e $t_0 \in [0, 1]$ tais que $\Phi(x_0, t_0) = 0$, então $x_0 = t_0T(x_0)$. Por (1), segue que $t_0 < 1$. Desde que $T(\overline{D}) \subset \overline{D}$, temos que $T(x_0) \in \overline{D}$. Assim, $t_0 < 1$ e D convexo, implicam que $(1 - t_0)0 + t_0T(x_0) = t_0T(x_0) \in D$, contradizendo o fato de $t_0T(x_0) = x_0 \in \partial D$.

Pela Afirmação e pelo Teorema 2, segue que $d(I - T, D, 0) = d(I, D, 0) = 1$, porque $0 \in D$. Finalmente, segue da propriedade de solução que existe $x \in D$ tal que $T(x) = x$.

5. Aplicações

Definição 3 *Seja Ω uma região limitada do $\mathbb{R}^n$ e $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua, definimos o operador de Neymistki por $\gamma(u) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ por $\gamma(u)(x) = g(x, u(x))$.*

Sejam $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função continua e $K : C([0, 1], \mathbb{R}) \to C([0, 1], \mathbb{R})$ o operador definido por

$$K(u)(t) = \int_0^1 k(s, t)u(s)ds.$$

O grau de Leray-Schauder é uma importante ferramenta no estudo de existência de solução para a equação integral

$$u = K(\gamma)(u) \tag{2}$$

Teorema 3 *Assuma que g é uma função contínua e limitada. Então a equação (2) admite pelo menos uma solução.*

Aplicaremos o teorema do ponto fixo de Schauder. Como g é limitada, existe $M > 0$ tal que $\|K \circ \gamma(u)\| \leq M$, para todo $u \in C([0, 1])$. Desse modo, para $\lambda \in [0, 1]$ y $\|u\| \leq 2M$ temos $\|\lambda K(\gamma(u))\| \leq \lambda M$. Portanto $\|u - K(\gamma(u))\| \geq 2M - \lambda M > 0$. Assim, existe $u \in B_{2M}(0)$ tal que

$$u(t) = \int_0^1 k(s, t)g(s, u(s))ds.$$

Corolário 1 *Se g é limitada então a equação*

$$-u''(t) = g(t, u(t)), \quad u(0) = u(1) = 0$$

admite uma solução.

Demostração: *Basta tomar*

$$k(s, t) = \begin{cases} (1 - t)s, & para\ s \in [0, t] \\ (1 - s)t & para\ s \in [t, 1], \end{cases}$$

no Teorema 3.

6. Conclusões

A teoria do grau é uma poderosa ferramenta matemática, com aplicações em Equações Diferenciais, Topologia e Sistemas Dinâmicos. Com esse projeto, além de aprofundar meu conhecimento em áreas tão essenciais da Matemática como Análise no $\mathbb{R}^n$, Análise Funcional e Topologia, tive a oportunidade de iniciar meus estudos sobre um assunto amplamente explorado em tópicos de pesquisa avançada em matemática.

7. Bibliografia

[1] R. L. Alves, *Multiplicidade Global de Soluções Positivas de um sistema elíptico semilinear via métodos topológicos*, Dissertação de Mestrado em matemática, UNB, Brasília, 2014.

[2] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Dover Publications, New York , 2010.

8. Agradecimentos

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

À minha orientadora, Laís, pela dedicação, paciência e por todo crescimento, tanto acadêmico quanto pessoal, que me proporcionou.