Uma Introdução à PI-Teoria

Vitória Augusta Dutra de Castro Soares (Licencianda em Matemática)
Prof. Dr. Luis Felipe Gonçalves Fonseca (Orientador)
Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (Fapemig)
Universidade Federal de Viçosa - Campus UFV - Florestal
vitoria.a.soares@ufv.br

FAPEMIG

UFV
CAMPUS UFV - FLORESTAL

1. Resumo

A teoria das identidades polinomiais, PI-teoria, é uma área da álgebra de grande importância matemática, que vem se desenvolvendo a partir da metade do século anterior.
Os estudos sobre álgebras com identidades polinomiais, mais conhecidas como PI-Álgebras, ganharam destaque a partir de 1945 com os trabalhos dos matemáticos N. Jacobson e I. Kaplansky, que tratavam da estrutura de anéis (ou álgebras) com identidades polinomiais, e, principalmente, com a publicação do Teorema de Amitsur-Levitzki que afirma que o polinômio standard de grau $2n$ é uma identidade polinomial para a álgebra de matrizes de ordem n.
Neste trabalho, serão estudados rudimentos de PI-Álgebras e Álgebras Livres. Serão calculadas as sequências de codimensões de $UT_2(F)$, àlgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 sobre um corpo F de característica zero e E, a àlgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita sobre F. Por fim, serão estudados alguns fundamentos de teoria das representações lineares. A meta desta parte será o cálculo da sequência de cocaracteres e cocomprimentos de E.

2. Definições elementares

Durante todo o texto, considere F como um corpo de característica zero.

Definição 1 *Definimos uma F-Álgebra como um par $(A,*)$, onde A é um F-espaço vetorial e "$*$" é uma operação binária em A, além de ser uma aplicação bilinear, ou seja, $*: A\times A\to A$ satisfaz:*

i. $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$
ii. $(a+b)*c=(a*c)+(b*c)$
iii. $(\lambda a)*b=a*(\lambda b)=\lambda(a*b)$

para quaisquer $a,b,c\in A$ e $\lambda\in F$.
Na definição acima, a operação "$*$" é denota produto ou multiplicação. Para simplificar a notação, vamos denotar a álgebra $(A,*)$ simplesmente por A, deixando o produto subentendido, e $a*b$ simplesmente por ab, para $a,b\in A$.
Uma F-álgebra também pode ser chamada de álgebra sobre F ou somente de álgebra, ficando subentendido o corpo F. Por simplicidade, a partir de agora usaremos o termo álgebra. Neste trabalho, veremos apenas àlgebras associativas, ou seja, vale a propriedade $a(bc)=(ab)c$ para todos $a,b,c\in A$.

Definição 2 *Uma matriz quadrada $A=(a_{ij})$ é chamada triangular superior se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos. Isto é, se $a_{ij}=0$ para $i>j$. O conjunto das matrizes triangulares superiores de ordem n sobre F é uma álgebra, ela será denotada por $UT_n(F)$.*

Definição 3 *Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1,e_2,e_3,\ldots\}$. Definimos a álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior) de V , denotada por E, como sendo a álgebra com base $\{1,e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_m}|m\ par\}$ e cujo produto é definido pelas relações $e_i^2=0$ e $e_ie_j=-e_je_i$ para quaisquer $i,j\in\mathbb{N}$. Observa-se facilmente que se $char F=2$, então E é uma álgebra comutativa.*
Considere em E os subespaços vetoriais E_0, gerado por $\{1,e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_m}\mid m\,\mathrm{par}\}$, e E_1, gerado por $\{e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k}\mid k$ ímpar $\}$. Claramente, $E=E_0\oplus E_1$ como espaço vetorial. Segue de $e_ie_j=-e_je_i$ que $(e_{i_1}...e_{i_m})(e_{j_1}\ldots e_{j_k})=(-1)^{mk}(e_{j_1}...e_{j_k})(e_{i_1}\ldots e_{i_m})$ para quaisquer $m,n\in\mathbb{N}$. Podemos concluir então que $ax=xa$ para quaisquer $a\in E_0$ e $x\in E$, e $bc=-cb$ para quaisquer $b,c\in E_1$.

Definição 4 *Considere $X=\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$ um conjunto enumerável de variáveis. Definimos uma palavra em X como sendo uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$ com $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ e $x_{i_j}\in X$ (para $n=0$ temos a palavra vazia). Denotaremos por $S(X)$ o conjunto de todas as palavras em X, por 1 a palavra vazia e por $S_0(X)$ o conjunto $S(X)-\{1\}$. Considere agora $F\langle X\rangle$ como sendo um F-espaço vetorial com base $S(X)$. Os elementos de $F\langle X\rangle$ são chamados de polinômios, os quais são somas (formais) de termos (ou monômios), que são produtos de um escalar por uma palavra em X. Observe que o subespaço de $F\langle X\rangle$ gerado por $S_0(X)$, o qual denotaremos por $F_0\langle X\rangle$, é uma subálgebra (sem unidade) de $F\langle X\rangle$.*

Definição 5 *Sejam A uma álgebra e $a,b\in A$. Definimos o comutador de a e b (comutador de peso dois) como sendo $[a,b]=ab-ba$. Definimos também o comutador de comprimento n como sendo $[a_1,...,a_{n-1},a_n]=[[a_1,...,a_{n-1}],a_n]$ para $a_i\in A$.*

Definição 6 *Sejam A uma álgebra e S um subconjunto não vazio de A. Definimos a subálgebra de A gerada por S, denotada por $F\langle S\rangle$, como sendo a interseção de todas as subálgebras de A que contêm S (e 1_A, no caso de A possuir unidade). Definimos também o ideal de A gerado por S como sendo a interseção de todos os ideais de A que contêm S.*

Definição 7 *Sejam $m\in F\langle X\rangle$ um monômio e $f\in F\langle X\rangle$ um polinômio.*

i. Dizemos que o número de vezes que x_i aparece no monômio m é o grau de m em x_i, e o denotamos por $deg_{x_i}m$.
ii. O polinômio f é dito homogêneo em x_i se o grau de x_i em todos os monômios de f é o mesmo. Se f é homogêneo em todas as suas variáveis, dizemos que f é multi-homogêneo.
iii. O monômio m é dito linear em x_i se $deg_{x_i}m=1$.
iv. Chamamos o polinômio $f(x_1,x_2,...,x_n)$ de linear em x_i se todos os seus monômios são lineares em x_i. Se $f(x_1,x_2,...,x_n)$ é multi-homogêneo e linear em todas as suas n variáveis, diremos que $f(x_1,x_2,...,x_n)$ é multilinear (de grau n).

Além disso, fixadas as variáveis $x_1,x_2,...,x_n$, denotaremos por P_n o subespaço vetorial de $F\langle X\rangle$ de todos os polinômios multilineares nas variáveis $x_1,x_2,...,x_n$.

3. PI-Àlgebra

Definição 8 *Uma PI-álgebra A á uma F-álgebra que satisfaz um polinômio não nulo em $F\langle X\rangle$. Isto é, existe $f(x_1,...,x_n)\in K\langle S\rangle$ não nulo tal que:*

$$f(a_1,...,a_n)=0,\forall a_1,...,a_n\in A$$

O polinômio f é dito uma identidade polinomial de A.

Observação Note que o termo constante de uma identidade polinomial f de uma F-álgebra A é nulo já que $f(0,...,0)=0$.

Exemplo1. Seja E a álgebra de Grassmann apresentada na Definição 3. Temos que $E=E_0\oplus E_1$, com $Z(E)=E_0$, tal que $Z(E)=a\in E|ab=ba\ \forall\ b\in E$. Note que $[E,E]\subseteq E_0$, e assim E satisfaz a identidade polinomial $f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]=[[x_1,x_2],x_3]=0$.

Exemplo2. Considere a álgebra $UT_2(F)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}|a,b,c\in F\right\}$. Sejam $\begin{pmatrix}a_1&b_1\\0&c_1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a_2&b_2\\0&c_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a_3&b_3\\0&c_3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a_4&b_4\\0&c_4\end{pmatrix}\in UT_2(F)$. Note que, como:

$$\left[\begin{pmatrix}a_1&b_1\\0&c_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2&b_2\\0&c_2\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}a_3&b_3\\0&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_4&b_4\\0&c_4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

segue que o polinômio $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=[x_1,x_2][x_3,x_4]$ é identidade polinomial de $UT_2(F)$.

Definição 9 *Seja $Q\subseteq F_0\langle X\rangle$. Um T-Ideal de $F_0\langle X\rangle$ é um ideal bilateral fechado sob a ação das tranformações lineares $\phi: F_0\langle X\rangle\to F_0\langle X\rangle$ tal que $\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)\ \forall\ a,b\in F_0\langle X\rangle$. Chamaremos de T-ideal de $F_0\langle X\rangle$ gerado por Q o T-ideal obtido pela interseção de todos os T-ideais de $F_0\langle X\rangle$ que contêm Q, e o denotaremos por $\langle Q\rangle^T$. Nas condições da definição anterior e fazendo $I=\langle Q\rangle^T$, chamamos Q de conjunto gerador do T-ideal I, e, sendo A uma álgebra tal que I coincide com o conjunto das identidades de A, Q também é chamado de base das identidades de A.*

Definição 10 *Seja A uma álgebra. Denotamos $Id(A)$ como sendo o conjunto das identidades de A. Além disso, $P_n(A)=P_n\cap Id(A)$.*

Definição 11 *Se I é um T-ideal de $F\langle X\rangle$, então I é gerado pelos seus polinômios multilineares.*

4. Sequência de codimensões

Definição 12 *Seja A uma álgebra. Para $n\in\mathbb{N}$, definimos a n-ésima codimensão* de A *como sendo*

$$c_n(A)=\dim P_n(A)=\dim\frac{P_n}{P_n\cap Id(A)}.$$

Proposição1. A é uma PI-álgebra se, e somente, se $c_n(A)<n!$ para algum $n>1$.

Teorema 1. Seja $UT_2(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 . Então $c_n(UT_2(F))=2^{n-1}(n-2)+2$ para todo $n\geq 1$.

Teorema2. Seja E a álgebra de Grassmann infinita e unitária. Então, $c_n(E)=2^{n-1}\forall\ n\geq 1$.

Teorema 3. (Teorema das Codimensões de Regev,1972). Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo F. Se A satisfaz uma identidade de grau $d\geq 1$ então $c_n(A)\leq(d-1)^{2n}$.

5. Representações

Definição 13 *Sejam A uma álgebra unitária e M um espaço vetorial. Considere o seguinte produto*

$$\cdot: A\times M\longrightarrow M$$

$$(a,m)\longmapsto a\cdot m$$

satisfazendo as condições:

i. $(a_1+a_2)\cdot m=(a_1\cdot m)+(a_2\cdot m)$
ii. $a\cdot(m_1+m_2)=(a\cdot m_1)+(a\cdot m_2)$
iii. $(\lambda a)\cdot m=a\cdot(\lambda m)=\lambda(a\cdot m)$
iv. $a_1\cdot(a_2\cdot m)=(a_1a_2)\cdot m$
v. $1_A\cdot m=m$, *em que 1_A é a unidade da álgebra A.*

para quaisquer $a,a_1,a_2\in A$, $m,m_1,m_2\in M$ e $\lambda\in F$. Dizemos que M, munido desse produto, é um A-módulo (ou módulo sobre A). Observe que, pelos itens $(i),(ii)$ e (iii) da definição anterior, temos que o produto "$\cdot$"é uma aplicação bilinear. De agora em diante, vamos considerar todos os módulos como sendo de dimensão finita (como espaços vetoriais).

Definição 14 *Sejam A uma álgebra e M um A-módulo. Definimos um submódulo (ou A-submódulo) N de M como sendo um subespaço vetorial N de M tal que $a\cdot n\in N$ para quaisquer $a\in A$ e $n\in N$. Se os únicos submódulos de M são $\{0\}$ e M, então M é dito irredutível (ou simples). Dizemos que um submódulo N de M é minimal se não existe submódulo N_1 de M satisfazendo $0\neq N_1\subseteq N$ (ou seja, se N, visto como módulo, é irredutível).*

Definição 15 *Considere G um grupo finito e $GL(V)$, em que $GL(V)$ é o grupo das tranformações lineares invertíveis de V em V, uma representação linear de G em V. Definimos uma representação linear de G em um espaço vetorial V como sendo um homomorfismo de grupos*

$$\phi: G\longrightarrow GL(V)$$

$$g\longmapsto\phi(g)=\phi_g$$

Definimos o grau da representação linear ϕ como sendo a dimensão do espaço vetorial V.

Teorema 3. (Maschke) Suponha que a característica de F não divide $|G|$, que $\phi: G\longrightarrow GL(V)$ é uma representação linear de grau finito e que W é um subespaço ϕ-invariante de V, $\phi_g(W)\subseteq W\ \forall\ g\ \in G$. Então $V=W\oplus W_1$, onde W_1 é um subespaço ϕ-invariante de V. Consequentemente, ϕ é completamente redutível.

Definição 16 *Seja $n\in\mathbb{N}$. Definimos uma partição de n como sendo uma r-upla $(n_1,n_2,...,n_r)$ de números naturais tais que $n_1\geq n_2\geq...\geq n_r$ e $n_1+n_2+...+n_r=n$. Dado $n\in\mathbb{N}$, usaremos $(n_1,n_2,...,n_r)\vdash n$ para denotar que $(n_1,n_2,...,n_r)$ é uma partição de n. Denotaremos por $Par(n)$ o conjunto das partições de n e por $p(n)$ o número de partições de n.*

Definição 17 *Seja $\lambda=(n_1,n_2,...,n_r)\vdash n$ Definimos o diagrama de Young D_λ da partição λ como sendo o conjunto $D_\lambda=\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}|1\leq i\leq r,1\leq j\leq n_i.\}$*

6. Agradecimentos

Agradeço à FAPEMIG e a coordenação deste evento pela oportunidade de apresentar meu trabalho em um evento tão importante como esse.
Agradeço também ao meu orientador Dr. Luis Felipe por todos os ensinamentos, pela paciência de sempre, por me mostrar a álgebra de uma forma diferente e por ser um exemplo de pessoa e matemático.

Referências

[1] A. de Oliveira.
[2] L. Fonseca, "Variedades de pi-expoente 2. dissertação de mestrado. universidade federal de minas gerais, p 94, 2010."
[3] A. Giambruno and Z. M., "Polynomial identities and asymptotic methods,."
[4] H. Boerner., "Representations of groups, 2nd ed., north-holland, amsterdan, 1967, 1970."
[5] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras, Springer-Verlag, Singapore, 1999.*
[6] N. Jacobson, *Basic Algebra II, 2a edição, Dover, New York, 2009.*
[7] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups, 2a edição, Springer, NY, 1996.*