UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Área Temática: Ciências Exatas e da Terra / Modalidade: Pesquisa

Conjuntos de Julia e de Mandelbrot

Bolsista: Vítor Emídio Simoncini - Graduando do curso de Matemática - UFV - vitor.simoncini@ufv.br
Orientador: Alexandre Miranda Alves - Professor do Departamento de Matemática - UFV - amalves@ufv.br

Introdução

Sistemas Dinâmicas é a área da Matemática que busca entender processos que evoluem com o tempo. Para isso, são estudados os comportamentos de órbitas de pontos de funções, pontos atratores e repulsores, entre outros. Pretende-se, com isso, fazer previsões acerca do comportamento de certas funções, sendo aplicáveis desde o mercado financeiro até a meteorologia.

Assim, algumas definições são importantes, como, por exemplo:

Órbita: Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa do tipo $f_c(z) = z^2 + c$, para $c \in \mathbb{C}$. A **órbita** de $z \in \mathbb{C}$ sob f é a sequência dada por $(f^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$, onde $f^n(z) = f \circ \cdots \circ f$, n vezes.

Pontos fixos e periódicos: um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é dito **fixo** se $f(z_0) = z_0$, e é dito **periódico** quando $f^n(z_0) = z_0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

O **conjunto de Julia cheio** da f é dado pelo conjunto de pontos do domínio cuja órbita é (uma sequência) limitada. O conjunto de Julia, por sua vez, é a borda/fronteira do conjunto de Julia cheio, que é onde a função apresenta comportamento caótico.

Já **conjunto de Mandelbrot** é o conjunto de parâmetros $c \in \mathbb{C}$ que fazem com que $(f_c(0))_{n\in\mathbb{N}}$ seja limitada.

Ambos os conjuntos citados aparecem sob o formato de um fractal quando gerados computacionalmente. Um **fractal** é um objeto autossemelhante cujas partes, quando ampliadas, reproduzem o todo.

Objetivos

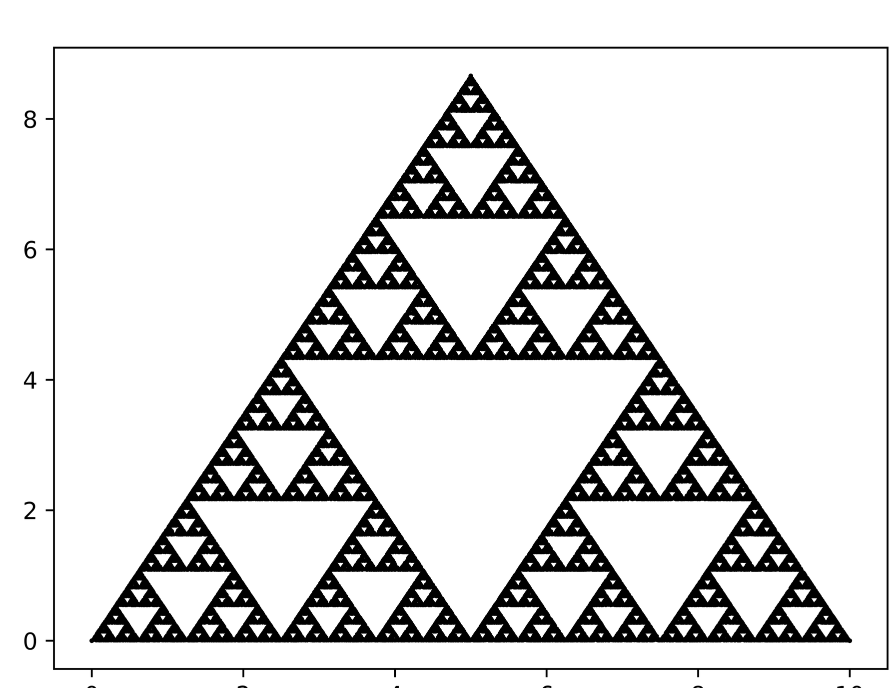
Compreender as propriedades dinâmicas dos conjuntos de Julia e Mandelbrot associados a funções complexas do tipo $f_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$, além de visualizar tais conjuntos por meio de métodos computacionais.

Metodologia

A metodologia utilizada para cumprir os objetivos consistiu na revisão bibliográfica de livros e artigos relacionados ao tema. Foi, também, utilizada a linguagem de programação Python para que fossem implementados os algoritmos geradores dos conjuntos de Julia e de Mandelbrot.

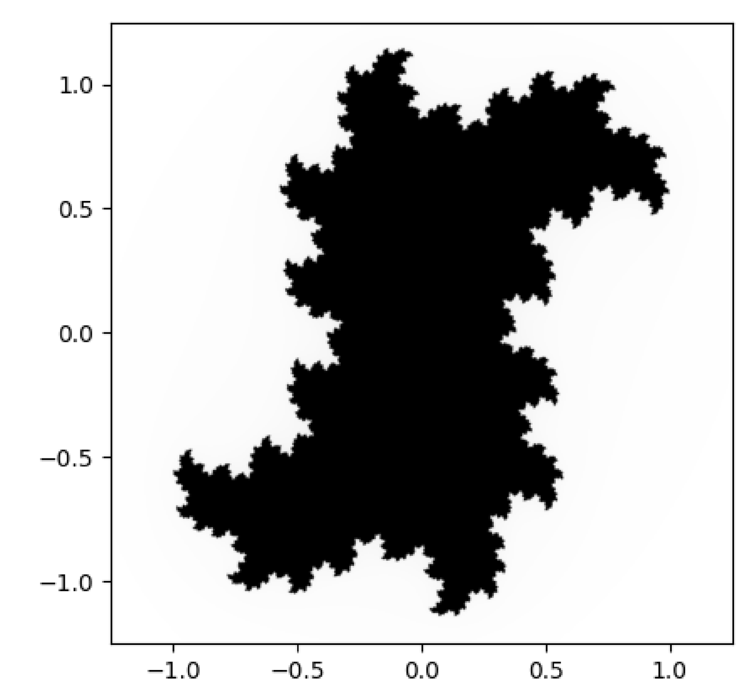
Resultados

Devido ao fato de que os fractais aparecem de forma recorrente nos estudos de Sistemas Dinâmicos, faz-se importante que tais objetos sejam estudados. Por meio da linguagem de programação Python, foi possível, nesse quesito, implementar um clássico algoritmo que gera o fractal **Triângulo de Sierpinski**. O algoritmo em questão é o **jogo do caos**, que consiste em tomar três pontos não-colineares formando os vértices de um triângulo e escolher dois deles ao acaso. Após essa escolha, tomamos o ponto médio entre os dois. Repetimos o processo tomando o ponto médio anteriormente determinado e um dos três vértices do triângulo.



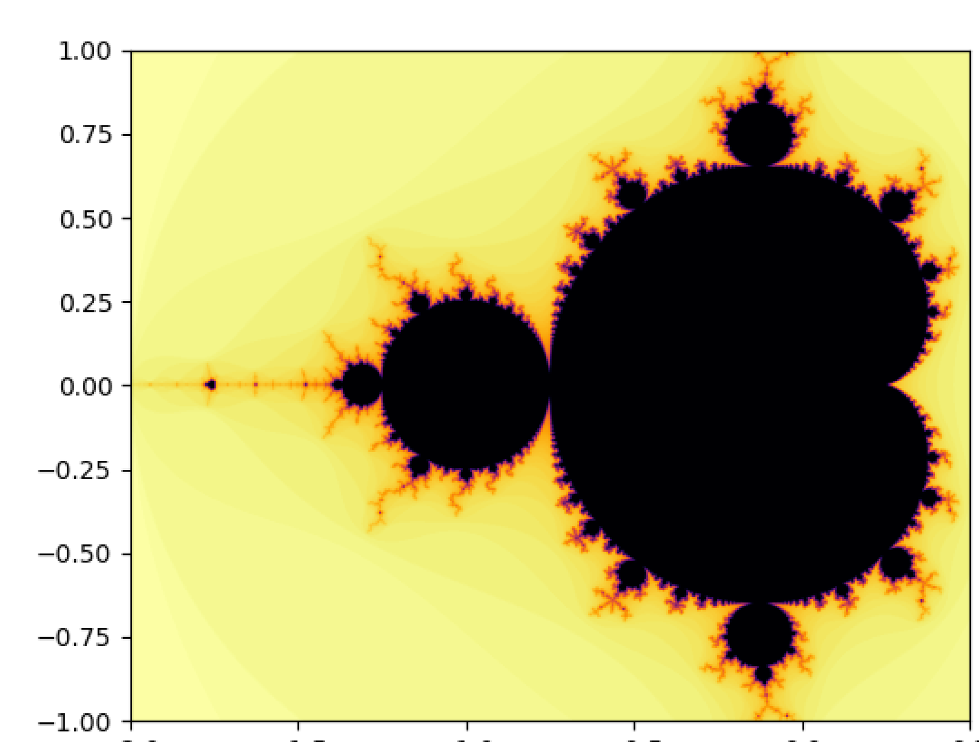
Triângulo de Sierpinski.

Ainda utilizando o Python, podemos implementar o algoritmo que irá gerar o conjunto de Julia cheio de uma dada função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, onde $f_c(z) = z^2 + c$, para $c \in \mathbb{C}$. Basta, para isso, tomar um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ qualquer e iterar f N vezes. Se os pontos da órbita de z_0 ficam em algum momento ficam maiores que $\max\{|c|, 2\}$, então o ponto z_0 não pertence ao conjunto de Julia cheio. Caso a órbita permaneça limitada após as N iterações, dizemos que pertence ao conjunto. Assim, repetimos esse processo para a maior quantidade de pontos do plano complexo. O que obtemos no final é uma aproximação cada vez melhor do conjunto de Julia cheio associado à função f, desde que N seja suficientemente grande.



Conjunto de Julia cheio da função $f(z) = z^2 + 0.3 - 0.4i$

Para plotar o conjunto de Mandelbrot, por sua vez, repetimos o mesmo processo que foi feito para o conjunto de Julia Cheio. No entanto, agora fixamos $z_0 = 0$ e fazemos $c \in \mathbb{C}$ variar. Assim, esse conjunto está localizado no espaço de parâmetros.



Conjunto de Mandelbrot

Conclusão

O estudo dos conjuntos de Julia e de Mandelbrot é muito importante no contexto de Sistemas Dinâmicos, uma vez que são úteis para mapear o comportamento dinâmico de uma determinada função. Para isso, os conhecimentos de programação e a computação gráfica se mostram muito úteis, permitindo-nos visualizar tais conjuntos. Por esses motivos podemos dizer que estamos mais cada vez mais próximos de fazer boas aproximações do comportamento até mesmo de sistemas caóticos, o que se aplica de diversas formas no cotidiano.

Bibliografia

[1] BRIN, M.; STUCK, G. Introduction to Dynamical Systems . Cambridge University Press, 2003.
[2] DEVANEY, R. L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems . CRC press, 2018.
[3] SOARES, M. G. Cálculo em uma Variável Complexa . Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
[4] TENENBLAT, K. Introdução à Geometria Diferencial . São Paulo: Blucher, 2008.