A Dinâmica dos Crescimentos Populacionais

Victória Myllena Aires Vieira Teixeira (Licencianda em Matemática)
Prof. Mehran Sabeti (Orientador)
Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (Fapemig)
Universidade Federal de Viçosa - Campus UFV - Florestal
victoria.vieira@ufv.br

CAMPUS UFV - FLORESTAL

1. Introdução

Para entender os diferentes modelos que são utilizados para representar a dinâmica de populações, temos a equação geral da taxa de crescimentos populacionais.

$$\frac{dN}{dT} = rN \tag{1}$$

Onde,

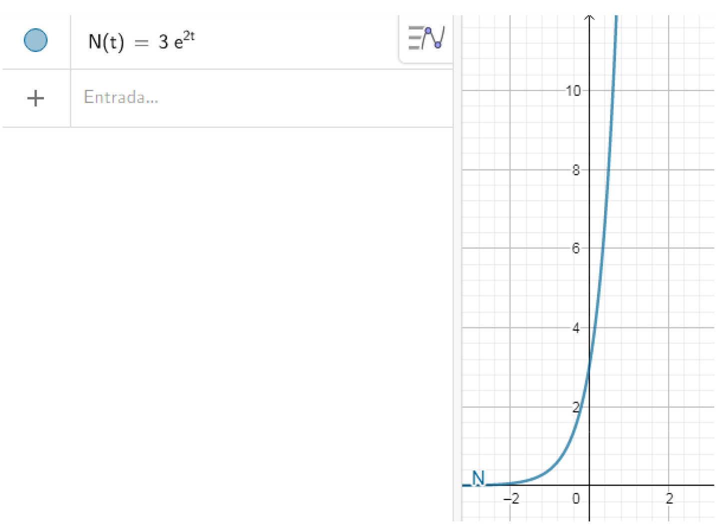
- $\frac{dN}{dT}$ é a taxa de crescimento da população em um dado instante.
- N é Tamanho da população.
- T é o tempo.
- r é a taxa de crescimento per capita.

A equação (1) é bastante geral, e nós podemos derivá-la em formas mais específicas para descrever os dois tipos de modelos de crescimento: o exponencial e o logístico.

2. Crescimento Exponencial

Quando a taxa per capita de crescimento (r) assume o mesmo valor positivo (constante), independentemente do tamanho populacional, então temos *crescimento exponencial*.

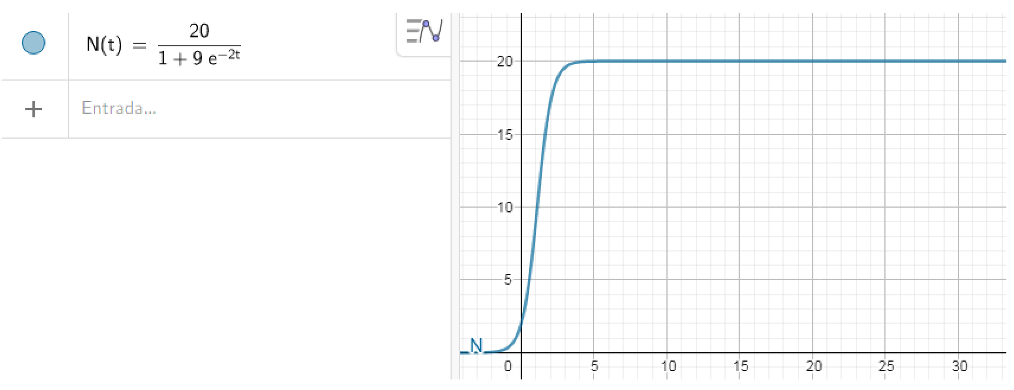
$$N(t) = Ae^{rt} \tag{2}$$



3. Crescimento Logístico

Quando a taxa per capita de crescimento (r) diminui à medida que a população aumenta em direção ao seu limite máximo, então temos um *crescimento logístico*.

$$N(t) = \left(\frac{K}{1 + Ae^{-rt}}\right) \tag{3}$$



4. Equação de Difusão no Modelo de Spruce Budworm

O Spruce Budworm (Choristoneura fumiferana) é uma mariposa nativa da América do Norte que se alimenta principalmente de abeto balsâmico. As árvores geralmente morrem após quatro ou cinco anos consecutivos de perda severa de todas ou da maioria das folhas.

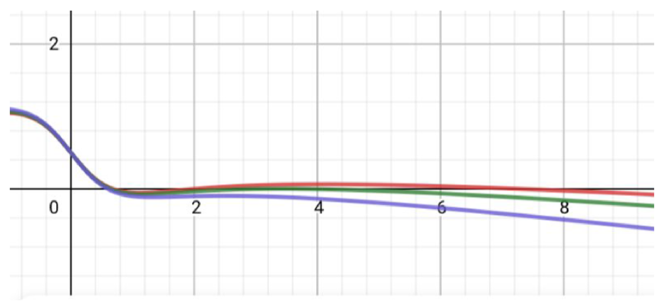
Ludwig (1978) considerou que a dinâmica populacional do Budworm foi modelada pela equação:

$$\frac{dN}{dT} = r.N(1 - \frac{N}{K}) - \beta\frac{N^2}{\alpha + N^2} \tag{4}$$

Podemos perceber que foi adicionando um termo de predação, pois agora estamos considerando a existência de outra espécie (2 populações) em um determinado ambiente. A partir daí, podemos adimencionalizar a nossa equação e trabalhar com parâmetros simplificados. Sendo a nossa nova equação:

$$f(u, R, Q) = R(1 - \frac{u}{Q}) - \frac{u}{1 + u^2} \tag{5}$$

Que é uma equação facilitadora para chegarmos ao nosso objetivo principal que é encontrar os pontos de equilíbrio. O ponto de equilíbrio nos informa o futuro/rumo que uma população irá tomar e é basicamente quando o crescimento da mesma se torna estável.
Temos aqui, o gráfico que representa a equação (5) com todos os seus pontos de equilíbrio representados e respeitando os valores de seus parâmetros.



5. Spruce Budworm com Difusibilidade

Quando se trata de difusibilidade, já temos uma equação pronta. Sendo ela:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

Com x representando a posição da espécie. Onde,

$$f(u) = Ru(1 - \frac{u}{Q}) - \frac{u^2}{1 + u^2} \tag{7}$$

- O que é difusibilidade?

Difusibilidade é a maneira como as espécies se deslocam dentro de um determinado ambiente.

Foi visto em estudos anteriores que existe uma relação entre os parâmetros R,Q e $f(u)$. Ou seja, existem intervalos para R e Q onde $f(u)$ possui três soluções não nulas.

- Um dos objetivos principais aqui, é justamente encontrar a existência de soluções de ondas viajantes entre os pontos de equilíbrio da equação 6.

Para começar, é necessário que tenhamos uma variável de onda, sendo ela:

$$u(x, t) = U(z) \text{ com } z = x - ct$$

Onde, c representa a velocidade de onda, ou seja, a rapidez do deslocamento de uma determinada espécie. Já o termo x, é a posição da espécie conforme falado anteriormente.

Utilizando a variável de onda na equação, vamos obter:

$$ut = \frac{dU}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dz}(-c) = -cU'$$
$$ux = \frac{dU}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{dU}{dz} = U'$$
$$uxx = \frac{dU'}{dz} = U"$$

Fazendo substituições, teremos:

$$U" + cU' + f(u) = 0 \tag{8}$$

Podemos escrever a equação (8) como um sistema de equação de primeira ordem.

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = -cV - f(U) \end{cases}$$

Como já vimos anteriormente, as raízes de $f(u)$ são $(0, u1, u2, u3)$. Logo, as soluções desse sistema são

$$(0, 0),\ (u1, 0),\ (u2, 0)e(u3, 0). \tag{9}$$

6. Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio

Conseguimos também vizualizar o que acontece nas vizinhaças dos pontos críticos através de autovalores e considerando $f(U, V) = V$ e $g(U, V) = -cV - f(U)$.

J = $\begin{bmatrix} \frac{f(U,V)}{\partial U} & \frac{f(U,V)}{\partial V} \\ \frac{g(U,V)}{\partial U} & \frac{g(U,V)}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -f'(u) & -c \end{bmatrix}$

Daí, teremos um polinômio característico:

det($\lambda I - J) = det = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -f'(u) & \lambda + c \end{bmatrix}$

$\lambda^2 + c\lambda + f'(u) = 0$

O que nos dá autovalores para λ, sendo eles:

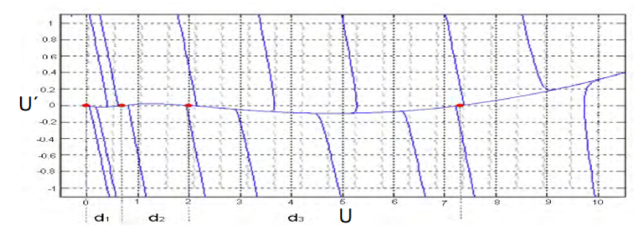
$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(u)}}{2} \tag{10}$$

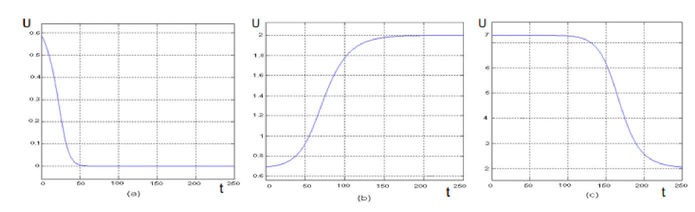
λ seria o nosso autovalor da matriz jacobiana. Onde pode ser analisado a estabilidade dos pontos de equilíbrios (9) através do comportamento do autovalor em cada um dos pontos de equilíbrio.

7. Solução de Ondas Viajantes para o Modelo de Spruce Budworm

Podemos também analisar a velocidade de onda c e ver o que acontece com os gráficos do nosso modelo de Spruce Budworm com difusibilidade quando o mesmo assume valores maiores que zero, menores que zero ou até mesmo ser nulo. Onde chamamos o mesmo de plano de fases.

O plano de fase para equação final da nossa matriz jacobianna com constantes $R = 0.5$, $Q = 10$ e $c = 3$, e divisão domínio em regiões $d1, d2ed3$.



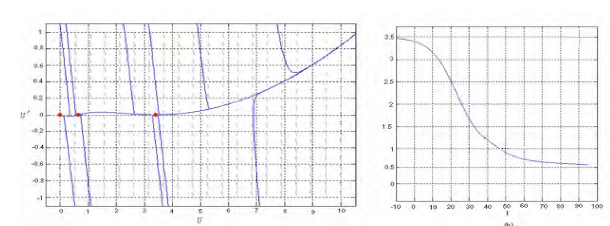


- a - As ondas viajantes no região $d1$ no plano de fase.
- b - As ondas viajantes no região $d2$ no plano de fase.
- c - As ondas viajantes no região $d3$ no plano de fase.

Como vimos a equação (10) pode nos dar quatro pontos críticos como $(0, 0), (u1, 0), (u2, 0)e(u3, 0)$ variando os parâmetros R e Q. Neste caso temos no plano de fase a origem como nó estável para c suficiente grande ($c > 2\sqrt{f'(0)}$) e $(u1, 0)$, $(u3, 0)$ como ponto da sela pois $f'(u1) < 0$ e $f'(u2) < 0$ e temos autovalores como

$$\lambda 1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2} \quad \lambda 2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2}$$

respectivamente, portanto obtemos o seguinte gráfico:



- a - O plano de fase para equação resultado da nossa matriz jacobiana caso só existem dois pontos de equilíbrio $u1$ e $u3$ com constanters $R = 0.5$, $Q = 7.414$ e $c = 3$.
- b - Ondas viajantes para equação Budworm com dois pontos de equilíbrios.

8. Referências

J.D. Murray, **Mathematical Biology**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
D.Ludwig, D. G. Aronson e H. F.Weinberger, **Spatial Patterning of Spruce Budworm**. Journal of Mathematical Biology, No. 8 (1979), pp. 217-258.