

Simpósio de Integração Acadêmica

"Bicentenário da Independência: 200 anos de ciência, tecnologia e inovação no Brasil e 96 anos de contribuição da UFV"

SIA UFV 2022



INTRODUÇÃO À TEORIA DE CONTROLABILIDADE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA - CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Fábio Ferreira de Freitas Júnior - fabio.f.junior@ufv.br Lais Moreira dos Santos - lais.msantos@ufv.br

Pesquisa-Equações Diferenciais-Matemática

Palavras chaves: Equações Diferenciais, Teoria de Controle.

1. Introdução

A teoria de sistemas dinâmicos é uma ferramenta matemática importante na compreensão de diversos fenômenos observados em diferentes áreas do conhecimento. Dentro desta área, destaca-se a teoria de controle de equações diferenciais ordinárias que lida com sistemas dinâmicos cujo comportamento pode ser alterado por meio de introdução de controles. Mecanismos de controles são facilmente encontrados no nosso dia a dia: seres vivos usam controle para equilibrar a temperatura corporal, medicamentos são prescritos para pacientes com câncer para controlar o crescimento tumoral e carros possuem controles de velocidade. A teoria de controle é uma área muito vasta que surgiu da necessidade dos seres humanos de controlar o meio em que vive. Do ponto de vista matemático, a teoria de controle obteve notoriedade durante a Revolução Industrial com o surgimento de novas ideias e métodos. No entanto, a análise de problemas de controle usando equações diferenciais começou a ganhar destaque apenas por volta de 1960, quando os cientistas perceberam que os modelos de controle utilizados até o momento não eram precisos o suficiente para descrever a complexidade do mundo real. Neste pôster, trataremos da teoria matemática de controle de equações diferenciais ordinárias lineares.

2. Objetivos

O objetivo deste presente projeto é o estudo da teoria matemática do controle de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações. Mais precisamente, focamos nos aspectos de observabilidade, controlabilidade e estabilização de sistemas de controle. Como aplicação da teoria estudada, apresentamos o problema do pêndulo invertido.

3. Material e Métodos

O desenvolvimento desse projeto se deu através de pesquisa bibliográfica do tema, discussões semanais e apresentações de seminários para orientadora.

4. Sistema de controle

Nesse trabalho, consideramos o seguinte sistema linear de controle

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

em que $A : [t_0, t_1] \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $B : [t_0, t_1] \rightarrow M_{n \times m}(\mathbb{R})$ e $C : [t_0, t_1] \rightarrow M_{l \times n}(\mathbb{R})$ são operadores contínuos; $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de estado (variável a ser controlada); $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ é o vetor das variáveis de controle (entrada); $y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^l$ é o vetor de observação (saída); $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é o estado inicial do sistema.

Denotaremos o sistema (1) por (A, B, C) . Quando uma das aplicações A, B ou C for nula, deixaremos vazio o espaço que ela ocupa. Além disso, diremos que o sistema (A, B, C) é autônomo, se as funções matriciais A, B e C não dependem do tempo, isto é, A, B e C são matrizes constantes. Caso contrário, o sistema (A, B, C) será dito não autônomo.

5. Observabilidade

Suponha conhecidos o controle $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ e a saída $y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^l$ do sistema (A, B, C) . Uma pergunta natural nesse contexto é a seguinte: com base apenas nesses dados, podemos reconstruir todos os estados do sistema (A, B, C) ? A seguinte definição vai de encontro à essa questão.

Definição 1. Dizemos que o sistema (A, B, C) é observável em $[t_0, t_1]$, se para toda solução $x \in C^1([t_0, t_1]; \mathbb{R}^n)$ de $x'(t) = A(t)x(t)$ tal que $C(t)x(t) = 0$, $\forall t \in [t_0, t_1]$, valer $x(t_0) = 0$.

O teorema a seguir nos fornece uma condição necessária e suficiente para que o sistema (A, B, C) seja observável.

Teorema 1. O sistema (A, B, C) é observável em $[t_0, t_1]$ se, e somente se, o gramiano de observabilidade, dado por

$$W_o(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(s, t_0)^* C(s)^* C(s) \Phi_A(s, t_0) ds \text{ é não singular,}$$

em que Φ_A é a matriz de transição de estados do sistema $x'(t) = A(t)x(t)$.

6. Controlabilidade

Suponha fornecidos os estados x_0 e x_1 . Veremos condições para que exista um controle u de tal modo que a solução do sistema (A, B, C) satisfaça $x(t_0) = x_0$ e $x(t_1) = x_1$. Note que no sistema (A, B, C) o controle u atua apenas em $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, logo podemos focar somente no estudo do sistema (A, B) . Desta forma, podemos definir o conceito de controlabilidade.

Definição 2. Dizemos que o sistema (A, B) é controlável, se para cada par de estados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ existir um controle $u \in L([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ de tal modo que a solução x do problema de valor inicial $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $x(t_0) = x_0$, satisfaça $x(t_1) = x_1$.

O teorema a seguir, apresenta uma forma de determinar se o sistema (A, B) é controlável.

Teorema 2. O sistema (A, B) é controlável em $[t_0, t_1]$ se, e somente se, o gramiano de alcançabilidade, dado por

$$W_a(t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(s, t_0) B(s)^* B(s) \Phi_A(s, t_0) ds, \text{ é não singular.}$$

A semelhança entre o gramiano de alcançabilidade e o gramiano de observabilidade levanta o seguinte questionamento: os conceitos de controlabilidade e observabilidade estão relacionados? O teorema a seguir nos fornece uma resposta afirmativa para esta questão.

Teorema 3 (Teorema da Dualidade). Dado o sistema linear de controle (A, B) , são equivalentes as seguintes afirmações:

a) O sistema (A, B) é controlável em $[t_0, t_1]$;

b) O sistema $(-A^*, B^*)$ é observável em $[t_0, t_1]$.

O sistema $(-A^*, B^*)$ é chamado de dual do sistema (A, B) .

No caso em que o sistema (A, B) é autônomo, temos o seguinte resultado sobre controlabilidade.

Teorema 4 (Teorema de Kalman). O sistema (A, B) é controlável em $[0, T]$ para todo $T > 0$ se, e somente se, a matriz de controlabilidade, definida por $M_c = [B^* A^* B^* \dots (A^*)^{n-1} B^*]$, tem posto n .

7. Estabilização

A teoria de estabilização nos fornece condições para que um dado sistema de controle possa ser estabilizado através da escolha de controles apropriados. Nesta apresentação, abordamos um dos mecanismos clássicos de estabilização de sistemas de controle, chamado de estabilização por realimentação de estado.

Suponha que a entrada do sistema (A, B) seja da forma $u = Hx$, onde $H \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Assim, temos

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) = (A + BH)x(t).$$

Desta forma, para que o ponto de equilíbrio $x = 0$ seja assintoticamente estável, devemos escolher a matriz H de tal modo que a matriz $A + BH$ seja estável, isto é, tenha todos os autovalores com parte real negativa.

Definição 3. Dizemos que o sistema (A, B) é estabilizável, se existe uma matriz $H \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que a matriz $A + BH \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é estável.

O próximo teorema relaciona controlabilidade e estabilidade.

Teorema 5. Se (A, B) é um sistema autônomo controlável, então (A, B) é estabilizável.

Para o caso em que $B = b \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ e $H = h \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$, podemos encontrar uma matriz h que estabiliza o sistema (A, b) utilizando a fórmula de Ackermann para realocar os autovalores da matriz $A + bh$ em autovalores com parte real negativa. Para tanto, suponha que o polinômio mônico cujas raízes são os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (para cada valor complexo, assumiremos que seu conjugado também está listado) seja dado por

$$\rho(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0.$$

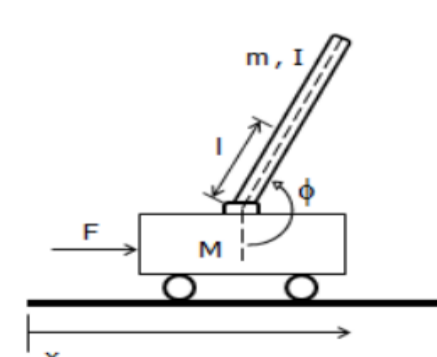
Desta forma, conseguimos alocar os autovalores de $A + bh$ tomando h como

$$h = E_1 [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b]^{-1} \rho(A), \text{ onde } E_1 = -[0 \ 0 \ \dots \ 1], \quad (2)$$

Portanto, para tornar o sistema (A, b) estabilizável, devemos substituir os autovalores da matriz A por autovalores com parte real negativa e utilizar a expressão (2) para escolher h .

8. Pêndulo invertido

O pêndulo invertido é um exemplo clássico de aplicação da teoria de controle. Esse sistema é formado por um carro e uma haste conectada ao carro, tal haste pode se mover para direita e para esquerda. O problema do pêndulo invertido, consiste em determinar uma força horizontal F agindo sobre o sistema de tal modo que a haste se mantenha estável. A figura a seguir retrata o sistema carro-haste e as componentes do sistema:



Aqui, estamos assumindo que: M é a massa do carrinho; m é a massa do pêndulo; b é o coeficiente de fricção do carrinho; l é a distância ao centro de massa do pêndulo; I é o momento de inércia do pêndulo; \vec{F} é a força aplicada ao carro (controle atuando no sistema); ϕ é a posição angular do pêndulo (variável a ser controlada) e x é a posição do carro (variável a ser controlada).

Vamos estudar a estabilidade desse sistema para os seguintes parâmetros: $M = 0.4$ Kg, $l = 0.005$ Kg · m, $m = 0.25$ Kg, $g = 9.8$ m/s²,

$b = 0.2$ (N·s)/m e $l = 0.25$ m. Substituindo esses parâmetros no sistema, temos

$$\begin{cases} X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.434 & 4.030 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.316 & 41.91 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2.171 \\ 0 \\ 6.579 \end{pmatrix} U(t) \\ Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X(t) \end{cases} \quad (3)$$

onde $X(t) = [x(t) \ x'(t) \ \phi(t) \ \phi'(t)]^T$, $U(t) = F(t)$ e $Y(t) = [y_1 \ y_2]^T$.

O primeiro passo é calcular os autovalores da matriz A para saber se o sistema (3) é estável. Calculando o polinômio característico de A , obtemos

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^4 + 0.434\lambda^3 - 41.91\lambda^2 - 12.885\lambda.$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0.307$, $\lambda_3 = 6.414$ e $\lambda_4 = -6.540$. Observe que $\lambda_3 = 6.414$ possui parte real não negativa, logo o sistema (3) não é estável.

Como o sistema (3) não é estável, resta saber se é possível estabilizá-lo. Nesse sentido, pelo teorema (5), basta verificarmos que (A, B) é controlável. Para isso, utilizamos o Teorema de Kalman. Assim,

$$M_c = [B^T \ A^T B^T \ (A^T)^2 B \ (A^T)^3 B] = \begin{bmatrix} 0 & 2.171 & -0.943 & 26.92 \\ 2.171 & -0.943 & 26.92 & -23.2 \\ 0 & 6.579 & -2.857 & 277.0 \\ 6.579 & -2.857 & 277.0 & -155.1 \end{bmatrix}$$

Escalonando tal matriz, vemos que ela tem posto 4 e portanto o sistema (3) é controlável. Assim, pelo o teorema (5), segue que o sistema (3) é estabilizável, ou seja, existe uma matriz H tal que a matriz $A + BH$ é estável. Vamos utilizar a fórmula de Ackermann para encontrar uma matriz $H \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ que estabiliza esse sistema. O primeiro passo para usar a fórmula de Ackermann é escolher autovalores com parte real não positiva. Desta forma, tome $\gamma_1 = -2$, $\gamma_2 = -3$, $\gamma_3 = -1$ e $\gamma_4 = -1$. O segundo passo é determinar a matriz $\rho(A)$. Note que

$$\rho(\gamma) = (\gamma + 2)(\gamma + 3)(\gamma + 1)^2 = \gamma^4 + 7\gamma^3 + 17\gamma^2 + 17\gamma + 6.$$

Assim, podemos calcular a matriz H através da equação (2), isto é,

$$H = E_1 M_c^{-1} \rho(A) = E_1 \begin{bmatrix} 0.2 & 0.65 & 0 & -0.062 \\ 0.65 & -0.007 & -0.062 & 0.002 \\ -0.007 & -0.016 & 0.002 & 0.005 \\ -0.016 & 0 & 0.005 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5.555 & 225.923 & 26.461 \\ 0 & -31.234 & 1131.367 & 225.923 \\ 0 & -73.775 & 2440.095 & 305.067 \\ 0 & -369.449 & 12488.023 & 2440.095 \end{bmatrix} = [0.096 \ 0.458 \ -8.586 \ -1.102]$$

Portanto, conseguimos controlar o sistema (3) e alcançar a posição de equilíbrio desejada através da realimentação de estados tomando $U(t) = HX(t)$, onde $H = [0.096 \ 0.458 \ -8.586 \ -1.102]$.

9. Conclusões

A teoria de controle lida com o problema cotidiano de se controlar grandezas através da introdução de mecanismos de controle. A abordagem matemática dessa teoria encontra aplicações em uma diversidade de áreas. Na Engenharia, por exemplo, o problema de lançamento de satélites e controle de robôs são exemplos de situações tratadas através da teoria de controle de EDO's. Com esse projeto, além de aprofundar meu conhecimento em áreas tão essenciais da Matemática como Álgebra Linear e Equações Diferenciais, tive a oportunidade de iniciar meus estudos em uma área de pesquisa tão profícua e multidisciplinar, que é a Teoria de Controle.

10. Apoio Financeiro

Este projeto contou com o apoio financeiro da CNPq.

11. Referências Bibliográficas

- [1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, 9ª ed., Ed. Guanabara, 2010.
- [2] S. Micu, E. Zuazua, *An introduction to the controllability of partial differential equations*, Collection Travaux en Cours Hermann, (2004), 69-157.
- [3] J. Baumaister, A. Leitão, *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica*, 1ª ed., IMPA, 2014.