



# Simpósio de Integração Acadêmica

“Bicentenário da Independência: 200 anos de ciência, tecnologia e inovação no Brasil e 96 anos de contribuição da UFV”

SIA UFV 2022



## MATRIZ PRÓXIMA GERAÇÃO: MODELO EPIDÊMICO SECIAR

Livia de Carvalho Faria - Universidade Federal de Viçosa  
Mehran Sabeti - Universidade Federal de Viçosa

Modelos epidêmicos, reprodutibilidade basal, COVID-19

### Introdução

Um modelo matemático é uma descrição de um sistema usando ferramentas e linguagem matemática. Um conceito muito importante na epidemiologia matemática é o de **reprodutibilidade basal** ou valor-limiar, denotado por  $R_0$ , que desempenha um papel vital na análise de modelos de doenças infecciosas e na compreensão delas, além disso seu valor fornece uma visão ao projetar intervenções de controle para infecções estabelecidas. Aqui serão apresentadas três formas para encontrar a taxa  $R_0$  em modelos epidemiológicos mais complexos.

### Objetivos

O objetivo desse trabalho é apresentar três formas de encontrar o parâmetro de reprodutibilidade basal através da Matriz Próxima Geração (MPG). Esses métodos são usados para modelos epidemiológicos mais complexos que não permitem achar o parâmetro  $R_0$  através de simples manipulações algébricas.

### Materiais e Métodos

Os materiais utilizados foram livros e artigos de diversos autores. Para discutir os resultados estudados, eram realizadas reuniões semanais com o orientador.

### Resultados e Discussão

Aqui, serão acrescentados ao modelo iniciar SEIR, os compartimentos C e A, que descrevem os compartimentos dos contagiosos e dos assintomáticos, onde:

- Expostos (E): Indivíduos que contraem a doença, são assintomáticos e não contagiosos;
- Contagiosos (C): Indivíduos assintomáticos e contagiosos;
- Assintomáticos (A): Indivíduos assintomáticos e contagiosos;
- Infectados (I): Indivíduos sintomáticos e contagiosos.

Serão apresentadas a partir de agora três maneiras de encontrar o parâmetro  $R_0$  a partir da matriz próxima geração. A primeira delas, com o maior domínio, será denotada por  $K$ , a segunda a ser apresentada será denotada por  $K_L$  e a última, com menor domínio, será denotada por  $K_S$ .

Seja  $\mathcal{F}_i(x)$  a taxa de surgimento de novas infecções no compartimento  $i$  e  $\mathcal{V}_i(x)$  a taxa de transferência/remoção de indivíduos do compartimento  $i$ , temos:

### Agradecimentos

Agradeço a minha família, meu orientador Mehran e ao programa de Iniciação Científica.

$$\frac{dS}{dt} = -\beta_c SC - \beta_I SI - \beta_A SA$$

$$\frac{dI}{dt} = p\gamma_C C - \gamma_I I$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_c SC + \beta_I SI + \beta_A SA - \gamma_E E$$

$$\frac{dA}{dt} = (1-p)\gamma_C C - \gamma_A A$$

$$\frac{dC}{dt} = \gamma_E E - \gamma_C C$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_I I + \gamma_A A$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dE}{dt} \\ \frac{dC}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \\ \frac{dA}{dt} \end{bmatrix} = \mathcal{F}(x) - \mathcal{V}(x) = \begin{bmatrix} \beta_c SC + \beta_I SI + \beta_A SA \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_E E \\ -\gamma_E E + \gamma_C C \\ -p\gamma_C C + \gamma_I I \\ -(1-p)\gamma_C C + \gamma_A A \end{bmatrix}$$

Considerando o ponto de equilíbrio livre de doença  $(S, E, C, I, A, R) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$  e aplicando na matriz jacobiana de  $\mathcal{F}(x)$  e  $\mathcal{V}(x)$  encontramos as matrizes  $F$  e  $V^{-1}$ . A Matriz Próxima Geração é dada por  $K = FV^{-1}$ . A partir do polinômio característico da matriz  $K$ , aplicado no ponto de equilíbrio livre de doença, encontra-se o raio espectral, que representa a reprodutibilidade basal do modelo SECIAR.

Segunda maneira: Para encontrar a matriz  $K_L$  devemos verificar se a matriz  $F$  dada anteriormente possui linhas consistindo inteiramente de zeros.

- Se não possuir, então  $K = K_L$ ;
- Se  $F$  possuir uma ou mais linhas inteiramente de zeros, então  $k \neq K_L$  e deve-se realizar a etapa posterior.

Identificar uma matriz  $E$  da seguinte forma:

- A matriz  $E$  tem o mesmo número de linhas de  $F$ ;
- Há uma coluna de  $E$  para cada linha diferente de zero de  $F$ . Essa coluna de  $E$  deve ter “1” na linha que correspondente a linha diferente de zero de  $F$  e “0” no restante. Onde,  $K_L = E' F V^{-1} E$ .  $E'$  é a matriz transposta de  $E$ .

Por último, para encontrar  $K_S$ , deve-se verificar se  $\det K_L = 0$ . Se

- $\det K_L \neq 0$ , então  $K_S = K_L$ ;
- $\det K_L = 0$  deve-se definir uma matriz  $R$  tal que as linhas de  $R$  são linearmente independentes (LI) e abrangem as linhas de  $F$ . E uma matriz  $C$  cujas colunas são LI e abrangem  $F$ . Dimensionando as matrizes de tal forma que  $T = CR$ . Portanto,  $K_S = RV^{-1}C$ .

$$R_0 = \frac{\beta_c}{\gamma_C} + \frac{p\beta_I}{\gamma_A} + \frac{(1-p)\beta_A}{\gamma_A}$$