Simpósio de Integração Acadêmica
"A Transversalidade da Ciência, Tecnologia e Inovações para o Planeta"
SIA UFV Virtual 2021
UFV Universidade Federal de Viçosa

Carlos Lúcio Nunes de Oliveira Filho
carloslfilho@ufv.br

Ady Cambraia Junior
ady.cambraia@ufv.br (Orientador)

Evolutóides de curvas planas

1. Introdução

Dada uma curva γ suave, fechada e sem auto-interseções, o envelope da família de retas tangentes é formado pela própria curva reunida com as retas tangentes nos pontos de inflexão e o envelope da família de retas normais consiste da evoluta de γ. Uma questão que surge de maneira natural é o que ocorre entre os envelopes das retas tangentes e o das retas normais. Considere a reta L_α obtida girando a reta tangente à curva γ no sentido anti-horário por um ângulo fixado α. O envelope desta família de retas consiste do evolutóide de γ. A geometria desses envelopes tem sido estudada desde Réaumur em 1709. Mais recentemente, M. Hamman (2009) explorou os evolutóides de curvas ovais (fechadas sem inflexões). J. Jerónimo-Castro (2013) explorou relações entre a curva e seu evolutóide e, P. Giblin e J. P. Warder (2014) estudaram como estes conjuntos evoluem desde a curva até a sua evoluta.

2. Objetivos

Os objetivos deste trabalho concentram- se em apresentar os evolutóides de uma curva fechada suave, bem como estudar algumas relações entre a curva e seu evolutóide.

3. Material e método

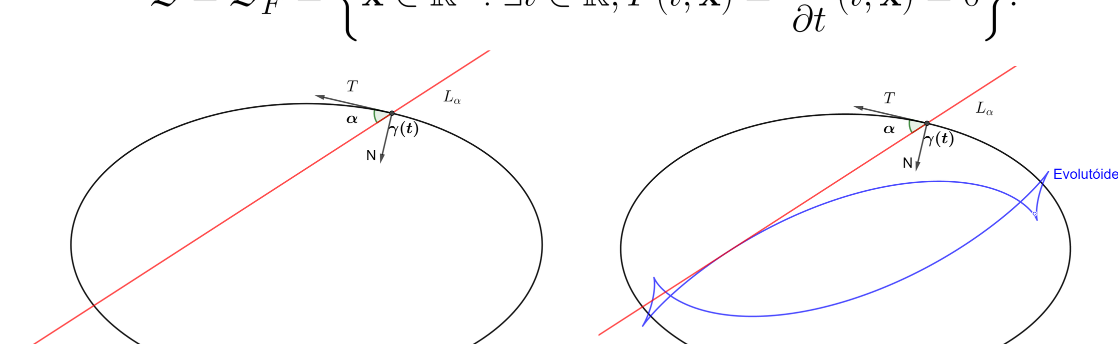
Para isso, se fez necessário uma revisão da geometria diferencial de curvas planas, bem como um estudo detalhado sobre envelopes e uma introdução a conceitos da teoria de singularidades.

4. Evolutóides euclidianos

Definição 1. *O evolutóide de uma curva γ é o envelope da família de retas L_α, com $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(t,\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}-\gamma(t), T(t)\sin(\alpha) - N(t)\cos(\alpha)\rangle \ (1).$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_F = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 : \exists t\in\mathbb{R}, F(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = 0\right\}.$$



Proposição 1. *O envelope dado por $\mathbf{x}(t) = \gamma(t) + \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)T(t)}{k(t)} + \frac{\sin^2(\alpha)N(t)}{k(t)}$ (para $k\neq 0$) não é regular se, e somente se, $k^2\cos(\alpha) - k_s\sin(\alpha) = 0$, onde k_s é a derivada da curvatura em relação ao comprimento de arco s em γ. Esta condição também pode ser escrita em termos do raio de curvatura $\rho = \frac{1}{k} : \rho_s\sin(\alpha)+\cos(\alpha) = 0$.*

De fato. Seja $\gamma_\alpha = \mathbf{x}(t)$ temos $\gamma_\alpha^{'}(t) = \left(||\gamma^{'}||\cos(\alpha) - \frac{k^{'}\sin(\alpha)}{k^2}\right)(T\cos(\alpha)+N\sin(\alpha))$. Logo, γ_α não vai ser regular quando $k^2||\gamma^{'}||\cos(\alpha) - k^{'}\sin(\alpha) = 0$. Em termos da curvatura, basta considerar

$$\frac{dk}{dt} = \frac{dk}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dk}{ds}||\gamma^{'}||.$$

Proposição 2. *Suponha que $k\neq 0, \sin\alpha\neq 0$, que as retas que formam o envelope não são retas tangentes a γ. Então a vértice como na proposição 1 é uma vértice ordinária. Se, e somente se, $2k_s^2 - kk_{ss}\neq 0$, onde as derivadas, em relação ao comprimento de arco s, são avaliadas no ponto do vértice. Isso também pode ser escrito como $\rho_{ss}\neq 0$ onde $\rho = \frac{1}{k}$ é o raio da curvatura de γ.*

Suponha γ p.p.c.a devemos mostrar que $\gamma_e^{''}$ e $\gamma_e{'''}$ são L.I. Calculando o determinante da matriz abaixo

$$A = \begin{pmatrix} \lambda\cos\alpha & \lambda^{'}\sin\alpha \\ \lambda^{''}\cos\alpha - 2\lambda^{'}k\sin\alpha & \lambda^{''}\sin\alpha - 2\lambda^{'}k\cos\alpha. \end{pmatrix}$$

Tal que $\lambda = \cos\alpha - \frac{k^{'}}{k^2}$. Logo, $det(A) = 2(\lambda^{'})^2k = 0$.

5. Teoria da singularidade

Definição 2. *Para $(\mathbf{X_0},\alpha_0) = (x_0,y_0,\alpha_0)$ a função $f(t) = F(X_0,\alpha_0,t)$ tem singularidade do tipo*

1. *Tipo A_2 em $t=t_0$ se $f^{'}(t_0) = f^{''}(t_0) = 0$ e $f^{'''}(t_0)\neq 0$.*
2. *Tipo A_3 em $t=t_0$ se $f^{'}(t_0) = f^{''}(t_0) = f^{'''}(t_0)$ e $f^{(iv)}(t_0)\neq 0$.*

Proposição 3. *Seja (x_0,y_0,α_0) satisfazendo $F = F_t = 0$ de modo que $(\mathbf{X_0},\alpha_0)\in D_F$*

1. *seja s a função comprimento de arco de γ. Suponha que $k(t_0)\neq 0$ tal que $\mathbf{X_0}$ seja dado por (1). Então $f(t) = F(\mathbf{X_0},\alpha_0,t)$ em $t=t_0$.*
   a. *Tipo A_2 em $t=t_0$ se $k^2\cos\alpha - k_s\sin\alpha = 0$ e $2k_s^2 - kk_s\neq 0$.*
   b. *Tipo A_3 em $t=t_0$ se $k^2\cos\alpha - k_s\sin\alpha = 0, 2k_s^2 - kk_s\neq 0$ e $6k_s^3 - k^2k_{sss}\neq 0$.*
2. *Suponha que $k(t_0) = 0, k^{'}(t_0)\neq 0$, de modo que γ tenha uma inflexão ordinária em $t=t_0$. Então, definido $\alpha_0 = 0$ o único $\mathbf{X}$ próximo $\gamma(t_0)$ para o qual $F_{tt}(\mathbf{X},0,t) = 0$ e $\mathbf{X} = \gamma(t_0)$ e $f(t) = F(\gamma(t_0),0,t)$ tem tipo A_2 em t_0.*

O item $i-(a)$ segue da prop. 2. Já o item $i-(b)$, temos que $\lambda^{'} = \sin\alpha\left(\frac{k^{''}}{k^2} + \frac{2(k^{'})^2}{k^3}\right)$. Então, $\lambda^{'''} = \frac{-k^{'''}k^2 + 6k^{''}k^{'}k^2 - 6(k^{'})^3k}{k^2} = 0$. Usando o fato de que $k^{''} = 0$ temos $kk^{'''} - 6(k^{'})^3\neq 0$.
Para o item (ii), basta usar o fato que $F = F_t = 0$ em $(\mathbf{X},0,t)$.

Proposição 4. *(Unicidade do conjunto discriminante) Sejam F e G dois desdobramentos versais a r-parâmetros de f (em t_0) e g (em t_1), respectivamente ambos do tipo $A_k(k\geq 1)$. Então existem vizinhanças U de t_0 e V de t_1 tal que existe um difeomorfismos $\phi : U\to V$ da forma $\phi(t,x) = (a(t,x),b(x))$ onde $a(t_0,x_0) = t_1, b(x_0) = u_0$ e*

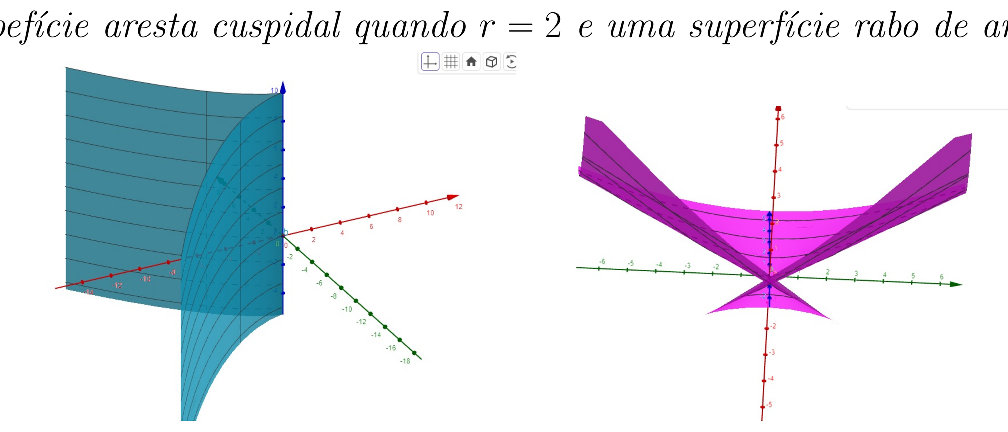
1. *b é um difeomorfismo de $\pi(U)$ a $\pi(V)$, onde cada π é a projeção dos parâmetros de desdobramento, e $b(D_F\cap\pi(U)) = D_G\cap\pi(V)$.*

Definição 3. *(Critério matrícial de versalidade) Seja $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^r, (t_0,x_0)\to\mathbb{R}$ um desdobramento a r-parâmetros da função $f : \mathbb{R}, t_0\to\mathbb{R}$ e suponhamos que f tem singularidade de tipo $A_k, k\geq 1$ em t_0.Escrevemos $(k-1)$-jatos com constante de $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t,x_0)$ em t_0 como*

$$\alpha_{0,i} + \alpha_{1,i}t + \alpha_{2,i}t^2 + ... + \alpha_{k-1,i}t^{k-1}$$

para $i = 1,...,r$. Então F é versal se, e somente se, a matriz $(k)\times r$ dos coeficientes $(\alpha_{j,i})$ tem posto $k(r\geq k)$.

Teorema 1. *Suponha que F satisfaça o critério da definição 3 em uma vizinhaça de $\mathbf{X_0}\in D_F$, o discriminate é difeomorfo a uma supefície aresta cuspidal quando $r = 2$ e uma superfície rabo de andorinha para $r = 3$.*



Corolário 1. *A família F, como em (1), satisfaz as condições do teorema (1). Assim, quando $f(t) = F(\mathbf{X_0},t)$ tem singularidade do tipo A_k em t_0, $r = 2$ ou $r = 3$, nos casos abrangidos pela proposição 2, o discriminante D_F, que é a união dos envelopes L_α é sempre localmente de difeomorfo a uma superfície aresta cuspidal $(r = 2)$ ou a uma superfície rabo de andorinha para $(r = 3)$ na vizinhança de $\mathbf{X_0}$.*

Seja $u = (\cos\alpha,\sin\alpha) = (c,s)$. Pela def. 3, temos que $J = \begin{pmatrix} <T,u> & -<N,u> & \frac{s}{k} \\ <kN,u> & <kT,u> & -c \\ <-k^2T+k^{'}N,u> & <k^2N+k^{'}T,u> & 0 \end{pmatrix}$.

Para mostar caso A_2, temos que $J_1 = \begin{pmatrix} <T,u> & -<N,u> & \frac{s}{k} \\ <kN,u> & <kT,u> & -c \end{pmatrix}$ tem posto 2.

Já, para caso A_3 temos que $det(J) = k^2\sin\alpha + k^{'}cos\alpha\neq 0$. logo é um desdobramento versal.
Portanto chegamos no resultado desejado.

6. Relação entre o evolutóide e sua curva

Teorema 2. *Seja γ uma curva convexa e fechada no plano e $\alpha\in(0,2\pi)$. Então $L(\gamma_\alpha) = \cos(\alpha)L(\gamma)$.*
Pela prop. 1 temos $X^{'} = \left(||\gamma^{'}||\cos(\alpha) - \frac{k^{'}\sin\alpha}{k}\right)\cdot\left(\frac{x^{'}\cos\alpha}{||\gamma^{'}||} - \frac{y^{'}\sin\alpha}{||\gamma^{'}||}\right)$ e $Y^{'} = \left(||\gamma^{'}||\cos(\alpha) - \frac{k^{'}\sin\alpha}{k}\right)\cdot\left(\frac{y^{'}\cos\alpha}{||\gamma^{'}||} + \frac{x^{'}\sin\alpha}{||\gamma^{'}||}\right)$, tais que $\gamma = (x,y)$ e $\gamma_\alpha = (X,Y)$. Assim,

$$L(\gamma_\alpha) = \int_0^{2\pi}\sqrt{(X^{'})^2+(Y^{'})^2}\,dt = \cos\alpha\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{|\gamma^{'}|}\,dt - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{k^{'}}{k^2}\,dt.$$

Como $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{k^{'}}{k^2}\,dt = 0$. Logo $L(\gamma_\alpha) = \cos\alpha\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{||\gamma^{'}||}\,dt = \cos(\alpha)L(\gamma)$.

Definição 4. *Denominamos a função $\rho_\alpha : \gamma_\alpha(I)\longrightarrow\mathbb{R}$, dada por*

$$\rho_\alpha(t) = \rho(t-\alpha)\cos(\alpha) + \rho^{'}(t-\alpha)\sin(\alpha).$$

Com $t\in[0,2\pi]$ a função suporte do evolutóide.

Teorema 3. *Seja γ uma curva convexa e fechada de classe C^2 no plano e seja $\alpha > 0$ um número pequeno o suficiente para que γ_α seja uma curva convexa. Então*

$$A(\gamma_\alpha)\leq\cos^2(\alpha)\cdot A(\gamma).$$

Vale a igualdade se, e somente se, γ for um círculo euclidiano.
A demostração segue utilizando a fórmula de Blaschke, dada por: $A(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\rho^2(\theta) - (\rho^{'}(\theta))^2)d\theta$.
Agora,para o caso γ for um círculo euclidiano. Basta considerar a função suporte do círculo dada por:

$$\rho(t) = a_0 + a_1\cos(t) + b_1\sin(t).$$

7. Conclusão

Foi analisado que o evolutóide vai ter singularidade do tipo A_2 e A_3 caso as condições da proposição 3 sejam satisfeitas, assim eles vão ser difeomorfos a uma superfície aresta cuspidal ou a superfície rabo de andorinha, de acordo o corolário 1. Já a relação entre a curva e seu evolutóide é dada pelos teoremas 2 e 3.

Referências

[1] Aguilar-Arteaga, V., Ayala-Figueroa, R., González-García, I. et al.; *On evolutoids of planar convex curves II.* Aequat. Matemática. 89, 14331447(2015).

[2] Bruce, J. W.; Giblin, P. J. ;*Curves and Singularities: A geometrical introduction to singularity theory.* 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 340 p.

[3] Giblin, P. J.; Warder, J.P. *Evolving Evolutoids.* The American Mathematical Monthly.vol 121,Ed. 10, p. 871-889,2017.