# A MATRIZ DE CARTAN DE ÁLGEBRAS MONOMIAIS

CCE - Centro de Ciências Exatas
Bolsista PIBIC/CNPq:
Orientador:
Trabalho de Pesquisa

DMA - Departamento de Matemática
Sheila Gonçalves de Faria
Sônia Maria Fernandes
Ciências Exatas, Matemática

## 1. Introdução

Podemos definir álgebras naturalmente a partir de uma configuração combinatória usando grafo orientado chamada Álgebra de Caminho. Estudamos a relação entre uma álgebra de dimensão finita e uma Álgebra construída a partir de um grafo orientado. Estudamos a Teoria de Representações de Álgebras para que pudessemos caracterizar a matriz de Cartan de álgebra monomial. Começamos nosso estudo definindo álgebra, quiver e suas representações, daí falamos de módulos, submódulo, dando continuidade estudamos homomorfismo, núcleo, imagem, módulo simples, apresentamos módulos projetivos e injetivos. Dando continuidade, falamos sobre dimensões homológicas, onde é definido a dimensão projetiva, injetiva e a dimensão global. A seguir, apresentamos as representações, de quivers e indecomponíveis e também soma direta e representações, representações simples, projetivas e injetivas e, trouxemos alguns resultados importantes para nos auxiliar nas definições necessárias para nossos estudos. Para finalizar nosso estudo trouxemos a definição da Matriz de Cartan, e uma discussão entre o determinante da matriz de Cartan e dimensão global.

## 2. Álgebras e Módulos

Seja $K$ um corpo. Uma Álgebra associativa sobre $K$ (K-álgebra ou simplesmente álgebra) é um espaço vetorial $A$ de dimensão finita sobre $K$ no qual está definida uma multiplicação: $(a, b) = ab$ satisfazendo:

1 $(ab)c = a(bc)$
2 $a(b + c) = ab + ac$ e $(b + c)a = ba + ca$
3 $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$
Para quaisquer $a$, $b$, $c \in A$ e $\alpha \in K$.

**Definição 1.** *Um **quiver** (grafo orientado) $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ é uma quádrupla que consiste de dois conjuntos $Q_0$(cujos elementos são vértices) e $Q_1$(cujos elementos são flechas) e de duas funções $s, t$ : $Q_1 \to Q_0$ que associam cada flecha $\alpha \in Q_1$ o seu início $s(\alpha) \in Q_0$ e o seu final $t(\alpha)$. Uma flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $s(\alpha) = a$ e $t(\alpha) = b$ é denotada por $\alpha : a \xrightarrow{\alpha} b$. Um quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ é denotado por $Q = (Q_0, Q_1)$ ou simplesmente por $Q$.*

**Definição 2.** *Seja $Q$ um quiver. A **Álgebra de Caminho** $KQ$ de $Q$ é a K-Álgebra que, desconsiderando a orientação das flechas, é um K-espaço vetorial que tem como base o conjunto de todos os caminhos $(a|\alpha_1, ..., \alpha_n|b)$ de comprimento $l \geq 0$ em $Q$. Definimos o produto de duas bases $(a|\alpha_1, ..., \alpha_l|b)$ e $(c|\beta_1, ..., \beta_n|d)$ por*

$$(a|\alpha_1, ..., \alpha_l|b)(c|\beta_1, ..., \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, ..., \alpha_l, \beta_1, ..., \beta_k|d)$$

*onde $\delta_{bc}$ denota delta o Kronecker . Em outras palavras, o produto de dois caminhos é igual a zero se $t(\alpha_l) \neq s(\beta_1)$ e igual a composta dos caminhos $\alpha_1...\alpha_l\beta_1...\beta_k$ se $t(\alpha_l) = s(\beta_1)$. O produto de elementos da base é então estendida para elementos arbitrários de $KQ$ por distributividade.*

**Definição 3.** *Seja $A$ uma álgebra. Um **A-módulo** à esquerda é um grupo abeliano aditivo $M$ munido da multiplicação por escalar $A \times M \to A$, denotado por $(r, m) \mapsto rm$, tal que os seguintes axiomas são válidos para todo $m, m' \in M$ e $r, r' \in A$:*

*i)* $r(m + m') = rm + rm'$;
*ii)* $(r + r')m = rm + r'm$;
*iii)* $(rr')m = r(r'm)$;
*iv)* $1m = m$.

De modo análogo, é definido o A-módulo à direita.
Um módulo tem dimensão finita se a dimensão de $M$ como K-espaço vetorial é finita.

**Definição 4.** *Se $M$ é um A-módulo, então um **submódulo** $N$ de $M$, denotado por $N \subseteq M$, é um subgrupo aditivo $N$ de $M$ fechado para a multiplicação por escalar.*

**Definição 5.** *Seja $A$ uma álgebra e $M$ e $N$ A-módulos, então uma função $f : M \to N$ é um **A-Homomorfismo** se, para todo $m, m' \in M$ e todo $r \in A$, tivermos*

*i)* $f(m + m') = f(m) + f(m')$
*ii)* $f(rm) = rf(m)$

Se um A-homomorfismo é injetor, então é chamado de **monomorfismo**, já se é um A-homomorfismo sobrejetor, denominamos de **epimorfismo**. Se um A-homomorfismo é uma bijeção, então é chamado de **isomorfismo**. Dois módulos são isomorfos se existe um A-isomorfismo entre eles. Um A-homomorfismo $h : M \to M$ é chamado de **endomorfismo**.

Se $f : M \to N$ é um A-homomorfismo entre A-módulos, então

**Núcleo f** $= Ker(f) = \{m \in M; f(m) = 0\}$
**Imagem f** $= Im(f) = \{n \in N; \exists\, m \in M$ com $n = f(m)\}$

Os subconjuntos $ker(f)$ e $Im(f)$ são submódulos de $M$ e $N$ respectivamente.

**Corolário 1.** *Um A-módulo $M$ é **simples** se e somente se $M \cong A/I$, onde $I$ é um ideal maximal.*

Seja $A$ uma K-álgebra e $K$ um corpo, a **soma direta** à direita dos A-módulos $M_1, ..., M_s$ é definida sendo o K-espaço vetorial $M_1 \oplus ... \oplus M_s$ munido com a estrutura de A-módulo definida por $(m_1, ..., m_s)a = (m_1a, ..., m_sa)$ para $m_1 \in M_1, ..., m_s \in M_s$ e $a \in A$. Denotamos

$$M^s = M \oplus ... \oplus M \text{ (s cópias).}$$

Seja $A$ uma K-álgebra e $K$ um corpo, a **soma direta** à direita dos A-módulos $M_1, ..., M_s$ é definida sendo o K-espaço vetorial $M_1 \oplus ... \oplus M_s$ munido com a estrutura de A-módulo definida por $(m_1, ..., m_s)a = (m_1a, ..., m_sa)$ para $m_1 \in M_1, ..., m_s \in M_s$ e $a \in A$. Denotamos

$$M^s = M \oplus ... \oplus M \text{ (s cópias).}$$

**Definição 6.** *Um A-módulo $P$ diz-se **projetivo** se, dados A-módulos M, N; um epimorfismono $f : M \to N$ e um homomorfismo $g : P \to N$, sempre existe um homomorfismo $h : P \to M$ tal que $f \circ h = g$.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

**Definição 7.** *Um A-módulo $E$ é **injetivo** se,dado um ideal à esquerda $L$ de $M$ e um homomorfismo de A-módulos $g : L \to E$, sempre existe um homomorfismo $g' : M \to E$ que estende $g$, isto é, que faz com que o seguinte diagrama seja comutativo:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, "g'"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Seja $M$ um A-módulo. A **dimensão projetiva** $pdM$ de $M$ é o menor número inteiro $d$ tal que existe uma resolução projetiva da forma

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

sendo $P_i$ módulo projetivo, $d_i$ homomorfismo de módulos projetivos tal que $\text{Im}d_i = \text{Ker } d_{i-1}, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Se não existe tal resolução finita, então diremos que $M$ tem dimensão projetiva infinita.

A **dimensão injetiva** de $M$ é o menor número inteiro $d$ tal que existe uma resolução injetiva da forma

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{E_o} I_0 \xrightarrow{E_1} I_1 \longrightarrow ... \longrightarrow I_{n-1} \xrightarrow{E_n} I_n \longrightarrow 0$$

sendo $I_i$ módulo injetivo, $E_i$ homomorfismo de módulos injetivos e $\text{Im}E_i = \text{Ker } E_{i-1}, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.
Se não existe tal resolução finita, então diremos que $M$ têm dimensão injetiva infinita.
A **dimensão global**, denotada por $gldimA$ da álgebra $A$ é definida como o supremo da dimensão projetiva de todos os $A$-módulos, isto é

$$gldimA = sup\{pdM|M \in modA\}$$

## 3. Representações

**Definição 8.** *Representações de Quivers: Seja $Q$ um quiver finito. Uma **K-representação linear** ou simplesmente uma **representação** $M$ de $Q$ é definida pelos seguintes dados:*

*a) Para cada ponto $a \in Q_0$ é associado um K-espaço vetorial $M_\alpha$*

*b) Para cada flecha $\alpha : a \to b$ em $Q_1$ é associado uma função linear $\phi_a : M_a \to M_b$.*

*Tal representação é denotada como $M = (M_a, \phi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ ou simplesmente $M = (M_a, \phi_\alpha)$. Diremos que sua dimensão é finita se cada espaço vetorial $M_a$ tem dimensão finita.*

**Definição 9.** *Soma Direta e Representações Indecomponíveis :Sejam $M = (M_i, \phi_\alpha)$ e $M' = (M'_i, \phi'_\alpha)$ representações de $Q$. Então*

$$M \oplus M' = (M_i \oplus M'_i, \begin{pmatrix} \phi_\alpha & 0 \\ 0 & \phi'_\alpha \end{pmatrix})_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

*é uma representação de $Q$ chamada de soma direta de $M$ e $M'$. Dessa forma, podemos definir a soma direta de finitas representações, sendo*

$$M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_t = (M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_{t-1}) \oplus M_t.$$

**Teorema 1.** *(Teorema de Krull-Schimidt) Sejam $Q$ um quiver e $M \in Rep(Q)$. Então*

$$M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_t$$

*onde $M_i \in Rep(Q)$ são indecomponíveis e únicos, exceto pela ordem.*

**Teorema 2.** *(Teorema de Gabriel) Se $A$ é uma álgebra básica, conexa, associativa e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, então existe um quiver $Q_A$ e um ideal admissível $I$ da algebra de caminhos $KQ_A$ de $Q_A$ de modo que $A \cong KQ_A/I$*

**Teorema 3.** *(Teorema de Morita) Seja A=KQ/I, onde Q é um quiver finito conexo e I é um ideal admissível de KQ. Então existe uma equivalência K-linear de categorias*

$$F : ModA \to Rep_k(Q, I).$$

**a) Representação simples**:
$S(i)$ é de dimensão 1 no vértice $i$ e de dimensão 0 nos outros vértices. Então, $S(i) = (S(i), \phi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, onde

$S(i)_j = K$ se $i = j$ ou 0 caso contrário e $\phi_\alpha = 0$, para todas arestas $\alpha$.

$S(i)$ é chamada representação simples do vértice $i$.

**b) Representação projetiva**:

$$P(i) = (P(i)_j, \phi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

onde $P(i)_j$ é o K-espaço vetorial cuja base é o conjunto de todos os caminhos de $i$ para $j$ em $Q$. Então os elementos de $P(i)_j$ são da forma $\sum_c \lambda_c c$ onde $c$ percorre os caminhos de $i$ para $j$, e $\lambda_c \in K$ e se $j \xrightarrow{\alpha} l$ é uma flecha em $Q$, então $\phi_\alpha : P(i)_j \to P(i)_l$ é o mapa linear definido na base pela composição de caminhos de $i$ para $j$ com a flecha $j \xrightarrow{\alpha} l$.

Mais precisamente, a flecha $\alpha$ induz uma função injetora entre as bases de $P(i)_j$ e de $P(i)_l$, que associa $c = (i|\beta_1, ..., \beta_s|j)$ a $c\alpha = (i|\beta_1, ..., \beta_s, \alpha|l)$ e

$$\phi_\alpha(\textstyle\sum_c \lambda_c c) = \sum_c \lambda_c c\alpha.$$

$P(i)$ é chamada representação projetiva no vértice $i$.

**c) Representação injetiva**

$$I(i) = (I(i)_j, \phi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

onde $I(i)_j$ é o K-espaço vetorial cuja base é o conjunto de todos os caminhos de $j$ para $i$ em $Q$. Então os elementos de $I(i)_j$ são da forma $\sum_c \lambda_c c$ onde $c$ percorre os caminhos de $j$ para $i$, e $\lambda_c \in K$ e se $j \xrightarrow{\alpha} l$ é uma flecha em $Q$, então $\phi_\alpha : I(i)_j \to I(i)_l$ é o mapa linear definido na base eliminando a flecha $j \xrightarrow{\alpha} l$ dos caminhos de $j$ para $i$ que começam em $\alpha$ e enviando para zero os caminhos que não começam em $\alpha$. .

Mais precisamente, a flecha $\alpha$ induz uma função sobrejetora $f$ entre as bases de $I(i)_j$ e de $I(i)_l$, que associa $c = (j|\beta_1, ..., \beta_s|i)$ a $\alpha = (l|\beta_2, ..., \beta_s, |i), \beta_1 = \alpha$ e 0 caso contrário. E $\phi_\alpha$ é definida por

$$\phi_\alpha(\textstyle\sum_c \lambda_c c) = \sum_c \lambda_c c f(c).$$

$I(i)$ é chamada representação injetiva no vértice $i$.

## 4. Matriz de Cartan

Seja A uma K-álgebra de dimensão finita $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos. A **Matriz de Cartan** de A é a matriz $n \times n$ dada por:

$$C_A = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

onde $C_A \in M_n(Z)$, e $d_{ij} = dim_K(e_jAe_i)$, para $i, j \in 1, 2, ..., n$ (Lembrando que $P_i = e_iA$ com $i \in Q_o$).
Seja $C_A$ a matriz de Cartan da K-álgebra A $\cong$ KQ/I, então alguns fatos elementares sobre a matriz de Cartan são:

- A i - ésima coluna de $C_A$ é dim $P_i$, com $i \in Q_o$
- A i - ésima linha de $C_A$ é $(dimI_i)^t$, com $i \in Q_o$
- dim $P_i = C_A \cdot dimS_i$
- dim $I_i = (C_A)^t \cdot dimS_i$

**Exemplo 1.** *Seja $Q_1$ o quiver:*

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[dr, "\beta"] & & \\ & 2 \arrow[r, "\alpha"] & 1 \\ 4 \arrow[ur, "\delta"'] & & \end{tikzcd}$$

*com $I_1 = \langle \beta\alpha \rangle$ e $A_1 = \frac{KQ}{I_1}$*

$dimP_1 = (1000)^t$ $\quad$ $dimP_2 = (1100)^t$
$dimP_3 = (0110)^t$ $\quad$ $dimP_4 = (1101)^t$

$$C_{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*$detC_{A_1} = 1$ e $gldimA_1 = 2$.*

**Exemplo 2.** *Seja $Q_2$ o quiver:*

$$\begin{tikzcd} & 3 \arrow[dl, "\beta"'] & & \\ 2 \arrow[rr, "\gamma"'] & & 1 \arrow[ul, "\alpha"'] & 4 \arrow[l, "\delta"] \end{tikzcd}$$

*com $I_2 = \langle \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha \rangle$ e $A_2 = \frac{KQ_2}{I_2}$*

$$C_{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*$detC_{A_2} = 2$ e $gldimA_2 = \infty$*

Quando o ideal $I$ é gerado por monômios, a álgebra $A = KQ/I$ é chamada de **álgebra monomial**. O cálculo das entradas da matriz de Cartan no caso de álgebras monomiais, se reduz a contagem de caminhos no quiver $Q$ que não é zero em A, ou seja, o número de homomorfismos f de $A_j$ em $A_i$ dos $A$-módulos à direita. Vimos que no caso de álgebra monomial as entradas dessa matriz são facilmente calculadas em termos dos caminhos da álgebra de caminhos.

## 5. Conclusão

O que torna a matriz de Cartan um assunto interessante é que alguns problemas abertos famosos na teoria das representações estão relacionados a perguntas sobre invariantes de Cartan. Uma álgebra de dimensão finita com dimensão global finita é conhecida por ter determinante da matriz de Cartan igual a $-1$ ou 1.Um problema em aberto, por exemplo, é se o determinante da matriz de Cartan é sempre igual a $-1$ ou 1 para álgebras de dimensão global finita.

## 6. Bibliografia

1) K. L. M. Acosta. *Matriz de Cartan: Um Invariante Homológico.* Dissertação - Universidade Federal de Viçosa. Viçosa, 2016.

2) S. Eilenberg. *Algebras of cohomologically finite dimension.* Comment. Math. Helv. **28** (1954), 310-319.

3) J. P. Jans and T. Nakayama. *On the dimension of modules and algebras.* VII, Nagoya Math. J. **11** (1957), 67-76.

4) F. C. P. Milies. Anéis e módulos. *Publicações do IME-USP, SP.*

5) R. Schiffler. Quiver Representations.*Canadian Mathematical Society,* 2014.