Simpósio de Integração Acadêmica
"A Transversalidade da Ciência, Tecnologia e Inovações para o Planeta"
SIA UFV Virtual 2021

UM MODELO EPIDEMIOLÓGICO EM LÓGICA FUZZY

Kellton de Oliveira Sabino — Universidade Federal de Viçosa — kellton.sabino@ufv.br
Rogério Carvalho Picanço — Universidade Federal de Viçosa — rogerio@ufv.br
Ana Paula de Paiva Lima — Universidade Federal de Viçosa — ana.p.lima@ufv.br

Epidemiologia, Lógica Fuzzy, Biomatemática.

1. Introdução

Enquanto a Lógica Clássica matemática restringe-se a rígidos conceitos de "verdadeiro" ou "falso", a epidemiologia tende a ir no sentido contrário, com conceitos muito mais incertos e subjetivos. Fica claro, então, a necessidade de uma outra forma de Lógica para estudar áreas como a epidemiologia. Nesse contexto, surge a lógica fuzzy, onde estabelecemos valores gradativos a cada conceito. Este projeto baseia-se em estudar os problemas epidemiológicos sob a luz da lógica fuzzy.

2. Objetivos

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo em lógica fuzzy como uma alternativa mais próxima da realidade, de modo a ser usada para desenvolver modelos epidemiológicos mais precisos.

3. Material e Métodos

O trabalho foi desenvolvido com base na leitura de livros e teses, alguns na referência, discussões em encontro remotos e efetivação dos cálculos e conclusões.

4. Modelo SI Clássico

Com o intuito de descrever a dinâmica de doenças que ocorrem interação entre suscetíveis e infectados, buscamos por um modelo clássico mais simples, do tipo SI, descrito pelo modelo abaixo:

$$\beta : S \longrightarrow I$$

Onde β é uma taxa de transmissão.

O sistema clássico pode ser modelado pelas seguintes equações diferenciais

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \qquad \frac{dI}{dt} = \beta SI$$

Com $S + I = 1$, onde S é a proporção de indivíduos suscetíveis, I é a proporção de indivíduos infectados e β é o coeficiente de transmissão.

A solução para o modelo é dada por

$$I = \frac{I_0 e^{\beta t}}{S_0 + I_0 e^{\beta t}}$$

5. Modelo SI Fuzzy

Observe que conceitos de suscetível bem como infeccioso são incertos no sentido que há diferentes graus, tanto de suscetibilidade como de infecciosidade. Ou seja, não basta só o encontro entre suscetíveis e infectados. A carga viral do infectado determina uma maior ou menor taxa de transmissão.

Dessa forma vamos assumir

$$\beta = \beta(v) : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$$

O que em outras palavras, dependendo da carga viral a possibilidade de gerar uma nova transmissão vai variar no [0,1]. Note a diferença com o modelo clássico onde essa possibilidade varia no $\{0,1\}$.

Consideramos β, a seguinte função de pertinência

$$\beta(v) = \begin{cases} 0, & \text{se } v \leq v_{min} \\ \frac{v - v_{min}}{v_M - v_{min}}, & \text{se } v_{min} < v \leq v_M \\ 1, & \text{se } v_M < v \leq v_{max} \\ 0 & \text{se } v > v_{max} \end{cases}$$

Onde v_{min} representa a quantidade mínima de vírus necessária para que possa ocorrer a transmissão da doença.

Com a incorporação da carga viral, o modelo fuzzy pode ser visto como

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta(v)SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta(v)SI \end{cases}$$

Tendo por solução

$$I(v,t) = \frac{I_0 e^{\beta(v)t}}{S_0 + I_0 e^{\beta(v)t}}$$

para cada v fixo. Agora $I(v,t)$ é um conjunto fuzzy já que $I(v,t) \in [0,1]$.

6. Esperança Fuzzy

A partir desse ponto podemos calcular qual a expectativa (esperança) taxa de infectados em cada instante t, através do valor esperado fuzzy $EF[I(v,t)]$.

Nosso objetivo então é calcular o número médio de infectados a fim de fazer uma comparação entre os modelos clássicos e fuzzy, através de suas respectivas esperanças.

A integral fuzzy, ou esperança fuzzy do conjunto fuzzy $I(v,t)$ é dada por

$$EF[I(v,t)] = \int_{\mathbb{R}^+} I(v,t) d\mu = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [min[\alpha, \mu\{v \in \mathbb{R}^+; I(v,t) \geq \alpha\}] = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [min[\alpha, H(\alpha)]$$

onde

$$H : [0,1] \to [0,1]$$

$$\alpha \mapsto H(\alpha) = \mu\{v \in \mathbb{R}^+; I(v,t) \geq \alpha\}$$

Assim, para cada instante t, a função $H(\alpha)$, cujo ponto fixo é o valor $EF[I(v,t)]$, é dado por

$$H(\alpha) = \mu\{v \in \mathbb{R}^+; I(v,t) \geq \alpha\} = 1 - \mu\{v \in \mathbb{R}^+; I(v,t) < \alpha\}$$

Primeiro, observamos

$$H(0) = 1 - \mu\{v \in \mathbb{R}^+; I(v,t) < 0 = 1 - \mu(\emptyset) = 1 - 0 = 1$$

e

$$H(1) = 1 - \mu\{v \in \mathbb{R}^+; I(v,t) < 1 = 1 - \mu(\mathbb{R}^+) = 1 - 1 = 0.$$

Para $0 < \alpha < 1$, temos

$$I(v,t) < \alpha \Leftrightarrow \beta(v) < ln(\frac{\alpha S_0}{I_0(1-\alpha)})^{\frac{1}{t}}$$

Daí,

$$H(\alpha) = 1 - \mu\{v \in \mathbb{R}^+; \beta(v) < ln(\frac{\alpha k}{1-\alpha})^{\frac{1}{t}}\}$$

ainda é necessário calcular para $v_m < v < v_{min}$ Como $\beta(v) = \frac{v - v_{min}}{v_M - v_{min}}$ temos

$$\frac{v - v_{min}}{v_M - v_{min}} < ln(\frac{\alpha S_0}{I_0(1-\alpha)})^{\frac{1}{t}} \Leftrightarrow v < v_{min} + (v_M - v_{min}) ln(\frac{\alpha S_0}{I_0(1-\alpha)})^{\frac{1}{t}}$$

façamos $B = v_{min} + (v_M - v_{min}) ln(\frac{\alpha S_0}{I_0(1-\alpha)})^{\frac{1}{t}}$.

Assim, com algumas contas simples chegamos a

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 \leq \alpha \leq I_0 \\ 1 - \mu\{v \in [0,B)\} \text{ se } I_0 < \alpha < \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \\ 0 \text{ se } \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Temos ainda que definir a medida fuzzy, para isso precisaremos introduzir uma função de pertinência da carga viral do grupo. Supondo que a média de carga viral de um determinado grupo é $\overline{v}$ e a distribuição em torno dessa média é dada por

$$\rho(v) = \begin{cases} 0 \text{ se } v < \overline{v} - \delta \\ 1 - \frac{|v - \overline{v}|}{\delta} \text{ se } \overline{v} - \delta \leq v \leq \overline{v} + \delta \\ 0 \text{ se } v > \overline{v} + \delta \end{cases}$$

Neste caso a medida de possibilidade será

$$\mu : \wp(\mathbb{R}^+) \to [0,1]$$

$$\mu(A) = \frac{1}{\rho} \int_A \rho(v) dv.$$

Que também é uma medida de probabilidade cuja função densidade de distribuição é $\frac{\rho(v)}{\delta}$. Note que $\int_A \frac{\rho(v)}{\delta} = 1$.

7. Resultados e Discussões

Afim de exemplificar aos casos onde a carga viral é fraca, forte ou média, vamos calcular $EF[I(v,t)]$

a) Carga viral fraca (V_-): Neste caso, tomamos $v_{min} > \overline{v} + \delta$.
Como $B > v_{min}$, temos $\mu\{v \in [0,B)\} = 1$ e assim,

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 \leq \alpha \leq I_0 \\ 0 \text{ se } I_0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Portanto,

$$EF[I(v,t)] = I_0$$

O número de infectados em cada instante t permanece o mesmo do instante inicial, e portanto, a doença não se propaga. Este resultado está de acordo com o fato de que, nesta faixa, $\beta(v) = 0$

b) Carga viral forte (V^+): Neste caso, tomamos $v_M \leq \overline{v} - \delta$ e $\overline{v} + \delta < v_M$.
Para essa situação, como $B \leq v_M$, obtemos $\mu\{v \in [0,B)\} = 0$, logo

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 \leq \alpha \leq \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} \\ 0 \text{ se } \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

e, portanto

$$EF[I(v,t)] = \frac{I_0 e^t}{S_0 + I_0 e^t}$$

Novamente neste caso, obtemos a solução clássica quando $\beta = 1$.

c) Carga viral média (V_-^+):Neste caso tomamos $v_{min} < \overline{v} - \delta < \overline{v} < \overline{v} + \delta < v_M$.
Um calculo direto nos leva a

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 \leq \alpha \leq I(\overline{v} - \delta, t) \\ 1 - \frac{1}{2}(\frac{B - \overline{v}}{\delta} + 1)^2 \text{ se } I(\overline{v} - \delta, t) < \alpha \leq I(\overline{v}, t) \\ \frac{1}{2}(\frac{\overline{v} - B}{\delta} + 1)^2 \text{ se } I(\overline{v}, t) < \alpha \leq I(\overline{v} + \delta, t) \\ 0 \text{ se } I(\overline{v} + \delta, t) < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

8. Conclusões

Concluímos que quando a carga viral é muito alta (taxa de transmissão se aproxima de um) ou muito baixa (próxima de zero), os resultados obtidos coincidem com a lógica clássica. No entanto, quando a carga viral está em valores intermediários à curva (números) de infectados e suscetíveis são mais bem descritas pela lógica fuzzy.

Para finalizar queremos ressaltar que, diferentemente da Esperança Clássica, poderíamos ter utilizado outras medidas fuzzy para obter a Esperança Fuzzy. Modelos fuzzy são melhores que os clássicos em situações limites. O trabalho prossegue com aplicação do modelo na definição de estrategias de vacinação, com grande aplicação atual na pandemia do COVID-19.

9. Referências

1. L. C. Barros, R. C. Bassanezi. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática.** Coleção UNICAMP/IMECC, textos didáticos Vol. 5 (2006).
2. M.S. Cecconello, C.M. Pereira, R.C. Bassanezi.**Análise qualitativa da solução fuzzy do modelo epidemiológico SIR.** Biomatemática 22, Grupo de Biomatemática IMECC-UNICAMP, (2012), 77–92.

10. Apoio Financeiro

Este projeto contou com apoio financeiro do PIC/OBMEP.

11. Agradecimentos

Agradecemos a todos que de alguma forma contribuíram para a realização desse trabalho, ao PIC/OBMEP pela bolsa à terceira autora. Assim como a organização do SIA UFV Virtual 2021 por possibilitar a exposição dessa pesquisa.