Simpósio de Integração Acadêmica

“A Transversalidade da Ciência, Tecnologia e Inovações para o Planeta”

SIA UFV Virtual 2021

UFV Universidade Federal de Viçosa

RESULTADOS CLÁSSICOS DA ANÁLISE FUNCIONAL E SUAS CONSEQUÊNCIAS

Carolina Santana Tomaz - Universidade Federal de Viçosa - carolina.tomaz@ufv.br

Margareth da Silva Alves - Universidade Federal de Viçosa - malves@ufv.br

Teoremas de Hahn-Banach, teorema de Banach-Steinhaus, teorema da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado.

Matemática. Análise. Trabalho de Pesquisa.

1. Introdução

A Análise Funcional é uma das áreas centrais da matemática moderna, que trata do estudo dos espaços vetoriais normados, em especial os espaços de Banach e Hilbert, e dos operadores lineares contínuos entre eles. Pode-se dizer que Análise Funcional é uma Álgebra Linear em espaços de dimensão infinita com o uso de ferramentas da topologia. Ela é uma generalizção natural da Álgebra Linear clássica e destaca-se por desempenhar um papel crucial nos mais diversos ramos da Matemática.

2. Objetivos

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre tópicos da teoria da Análise Funcional, selecionando alguns resultados importantes. Este trabalho é um resultado das atividades desenvolvidas no Programa de Iniciação Científica e Mestrado- PICME, durante o período de janeiro de 2021 a julho de 2021.

3. Material e Métodos

Tendo como base o livro ”Fundamentos de Análise Funcional”([4]), iniciou-se o período das atividades de pesquisa. A metodologia utilizada neste projeto foi a de estudos de livros e discussões com a orientadora sobre os resultados apresentados, bem como de outros conteúdos relacionados com o tema.

4. Formas analíticas do Teorema de Hahn-Banach

Teorema 1 (Versão Generalizada do Teorema de Hahn-Banach). *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ dos reais ou complexos e $p : E \to \mathbb{R}$ uma aplicação que satisfaz*

$$p(ax) = |a|p(x) \quad e \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

para todo $a \in \mathbb{K}$ e quaisquer $x, y \in E$. Se $G \subset E$ é um subespaço vetorial e $g : G \to \mathbb{K}$ é uma aplicação linear tal que

$$|g(x)| \leq p(x) \quad \text{para todo } x \text{ em } G$$

então existe um funcional linear $T : E \to \mathbb{K}$ que estende a aplicação g e que satisfaz $|T(x)| \leq p(x)$ para todo x em E

5. Formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach

Definição 2. *Seja $E \neq \{0\}$ um espaço vetorial real. Um hiperplano de E é um subespaço vetorial $H \neq E$ tal que se W é um subespaço de E satisfazendo $H \subset W$, então $W = H$ ou $W = E$.*

Proposição 3. *Seja $E \neq \{0\}$ um espaço vetorial real normado e H um subespaço vetorial de E. Então H é um hiperplano fechado de E se, e só se, existe um funcional linear contínuo não nulo $\varphi : E \to \mathbb{R}$ tal que $Ker(\varphi) = H$.*

Usamos a notação $[\varphi = a]$ para representar o hiperplano afim $v_0 + H$, com $a = \varphi(v_0)$. .

Teorema 4 (Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach). *Sejam $A, B \subset E$ conjuntos convexos, não vazios e disjuntos de um espaço normado E. Se A for aberto, existe um hiperplano fechado $[\varphi = a]$ que separa A e B, ou seja,*

$$\varphi(x) \leq a \leq \varphi(y), \quad \forall\, x \in A,\ y \in B.$$

Teorema 5 (Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach). *Sejam $A, B \subset E$ conjuntos convexos, não vazios e disjuntos de um espaço normado E. Se A for fechado e B compacto, existe um hiperplano fechado $[\varphi = a]$, que separa A e B estreitamente, ou seja,* $\varphi(x) < a < \varphi(y), \ \forall\, x \in A,\ y \in B.$

6. Teorema de Baire e teorema de Banach-Steinhaus

Este é um importante resultado de topologia geral batizado em homenagem ao matemático francês René Baire. O teorema de Baire (1899) é essencial para a verificação do teorema de Banach-Steinhaus que veremos a seguir.

Teorema 6 (Teorema de Baire). *Todo espaço métrico completo, não vazio, não pode ser uma união enumerável de conjuntos cujo fecho tem interior vazio.*

Apresentaremos agora o teorema de Banach Steinhaus, batizado em homenagem à Banach e Steinhaus, personagens centrais da Análise Funcional. Também conhecido por Princípio da Limitação Uniforme, este resultado garante que se uma família de operadores for limitada pontualmente então essa família de operadores admite uma limitação uniforme. Denotamos por $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço normado de todos os operadores lineares contínuos de E em F com a norma $\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\|$.

Teorema 7 (Teorema de Banach-Steinhaus). *Sejam E e F espaços normados e E completo. Seja $(T_i)_{i\in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E, F)$ tais que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < \infty, \quad \text{para todo } x \in E.$$

Então,

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty.$$

Corolário 8. *Sejam E e F espaços vetoriais normados, com E completo. Seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de operadores em $\mathcal{L}(E, F)$ tal que $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em F, qualquer que seja $x \in E$. Se definirmos $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, então $T \in \mathcal{L}(E, F)$.*

7. Teorema da Aplicação Aberta

Este é mais um resultado famoso da Análise Funcional devido a Banach. O teorema da Aplicação Aberta garante que se E e F são espaços de Banach, então toda aplicação linear contínua e sobrejetiva $T : E \to F$ é uma aplicação aberta, ou seja, leva abertos de E em abertos de F. Denotamos por $B_E(0, R)$ o conjunto $\{x \in E;\ \|x\| < R\}$.

Lema 9. *Sejam E e F espaços normados, com E completo e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se existirem $r, R > 0$ tais que*

$$B_F(0, r) \subset \overline{T\big(B_E(0, R)\big)},$$

então $B_F(0, r/2) \subset T\big(B_E(0, R)\big)$.

Definição 10. *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ um operador linear. Dizemos que T é uma aplicação aberta se $T(A)$ é aberto em F, sempre que A for aberto em E.*

Teorema 11 (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ um operador linear, contínuo e sobrejetivo. Então, T é uma aplicação aberta. Em particular, para todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach , T^{-1} é contínuo.*

8. Teorema do Gráfico Fechado

Por fim, temos o teorema do Gráfico Fechado, que acaba por ser uma aplicação importante do teorema da Aplicação Aberta.

Definição 12. *Dizemos que o operador linear $T : E \to E$ é fechado se $G(T) = \{(x, T(x));\ x \in E\}$ é fechado em $E \times F$, ou seja, quando $G(T) = \overline{G(T)}$.*

Teorema 13 (Teorema do Gráfico Fechado). *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ um operador linear fechado. Então T é um operador fechado se, e somente, se T é contínuo.*

9. Conclusões

Através do estudo da teoria da Análise Funcional compreendeu-se a extensão de resultados sobre operadores lineares estudados na Álgebra Linear para espaços vetoriais normados de dimensão infinita e a aplicação da Topologia à Análise Matemática.

10. Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pela bolsa e ao Programa de Iniciação Científica e Mestrado-PICME pela oportunidade. Agradeço também a minha orientadora Margareth pelos ensinamentos e por toda atenção durante as atividades.

11. Referências Bibliográficas

[1] Elon L. Lima, Análise I, Editora da SBM, 2006.

[2] Elon L. Lima, Espaços Métricos, Editora da SBM, 1993.

[3]Hygino H. Domingues, Espaços métricos e Introdução à Topologia, Atual Editora, EDUSP, 1982.

[4] Geraldo Botelho, Daniel Pellegrino e Eduardo Teixeira, Fundamentos de Análise Funcional, SBM, 2012.

Apoio Financeiro

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico