# Grupos de Lie na Física

Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Matemática

Iago Greca Rossanes Fontes (DPF)
*iago.fontes@ufv.br*

Rogério Carvalho Picanço (Orientador)
*rogerio@ufv.br*
Matemática Aplicada
Matemática

Palavras chaves: Física de particulas, álgebras de Lie, grupos de Lie.
Pesquisa

## 1. Introdução

O conceito de simetrica aparece nas mais diversas áreas das ciências naturais. Na física, esse conceito é amplamente aplicado em inúmeros campos de pesquisa, indo desde aplicações na mecânica quântica até aplicações na cosmologia. Matematicamente, as simetrias são sistematizadas pelas estruturas algébricas chamadas de grupos. A teoria de grupos nos permite compreender de forma mais fundamental as simetrias e como elas são aplicadas. Dentro da teoria de grupos, existem os chamados grupos de Lie, introduzidos em 1870 por Sophus Lie, que tinha como objetivo estudar as simetrias em equações diferenciais. Como grande parte dos fenômenos físicos são descritos por equações diferenciais, não demorou muito até se perceber que os grupós de Lie teriam uma ampla aplicação no estudo de fenômenos físicos.

## 2. Objetivos

Tivemos como objetivo nesse trabalho estudar os tópicos da teoria de Lie, a relação entre os grupos de Lie e suas respectivas álgebras de Lie e representações. Também estudamos as aplicações dos conceitos da teoria de Lie no estudo de fenômenos físicos, focando principalmente na representação do grupo SO(3) por meio dos operadores momento angular orbital, e na classificação dos mésons e bárions via multipletos do grupo SU(3).

## 3. SO(3) e o momento angular orbital

Qualquer rotação do grupo SO(3) pode ser representada por

$$R(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=e^{(\theta_1 X_x+\theta_2 X_y+\theta_3 X_z)},$$

onde os operadores $X_x$, $X_y$, e $X_z$ são dados por

$$X_x=y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\quad;\quad X_y=z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\quad;\quad X_z=y\frac{\partial}{\partial x}-z\frac{\partial}{\partial y}$$

Esse operadores são dito *geradores infinitesimais* do SO(3).
Por outro lado, os operadores momento angular orbital são dados por

$$\hat{L}_x=-i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\quad;\quad \hat{L}_y=-i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)\quad;$$

$$\hat{L}_z=-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Dessa forma, temos que os operadores $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ e $\hat{L}_z$ são iguais, a menos de um fator $-i\hbar$, aos geradores do SO(3) $X_x$, $X_y$ e $X_z$. Portanto, podemos representar qualquer rotação do grupo SO(3) por

$$\boxed{R(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=e^{\frac{i}{\hbar}(\theta_1\hat{L}_x,\theta_2\hat{L}_y,\theta_3\hat{L}_z)}}.$$

## 4. Representações irredutiveis dos grupos de Lie

**Definição:** Seja $\Pi$ uma representação finita de um grupo de Lie de matrizes G agindo sobre um espaço vetorial $V$. Um subespaço $W$ de $V$ é dito invariante se $\Pi(A)w\in W$ para dodo $w$ em $W$ e pada todo $A$ em $G$. O espaço $W$ é dito não trivial se $W\neq\{0\}$ e $W\neq V$. Uma representação de $G$ sobre $W$ é dita *irredutível*.
A definição para representações irredutivels de uma álgebra de Lie é analoga.
**Definição:** Dado um grupo de Lie de matrizes $G$ com $r$ geradores (dentre eles, $p$ geradores que comutam entre si), chamamos *vetores peso* do grupo o conjnto de $p$-uplas formado pelos autovalores dos geradores que comutam. Esses vetores são representados num espaço $\mathbb{R}^p$, essa representação é chamada *diagrama de pesos* da representação $\mathbf{N}$. Cada ponto nesse diagrama representa um autovetor desses operadores.
**Exemplo:** $D^{(3)}(1,0)\equiv\mathbf{3}$ (Tripleto).

Pelas regras 2 e 4 (p. 253 em [4]), temos:

R2)$\rightarrow I_3^{\max}=\frac{1}{2}(1+0)=\frac{1}{2}\quad;\quad Y=\frac{1}{3}(1-0)=\frac{1}{3}\quad\therefore\quad\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

R4)$\rightarrow Y^{\min}=-\frac{2}{3}1-\frac{1}{3}0=-\frac{2}{3}\quad;\quad I_3=\frac{0}{2}=0\quad\therefore\quad\left(0,-\frac{2}{3}\right)$

Aplicando o operador $I_-$ ao peso $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, temos

$$\left(\frac{1}{2}-1,\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right).$$

Portanto, o diagrama de pesos do tripleto ($\mathbf{3}$) do SU(3) possui a forma

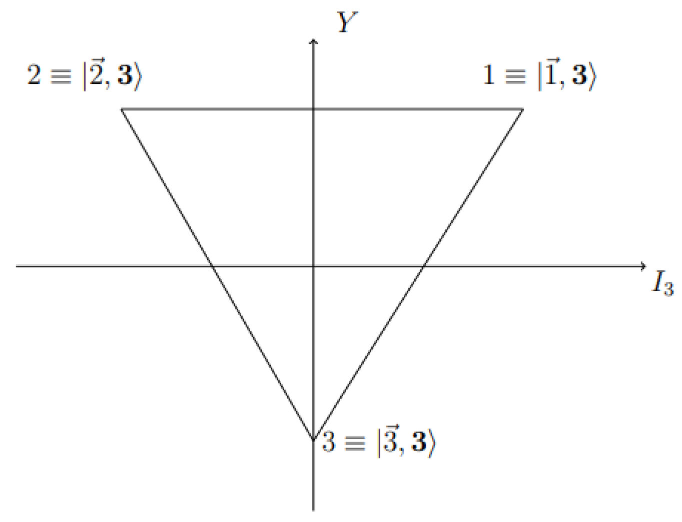
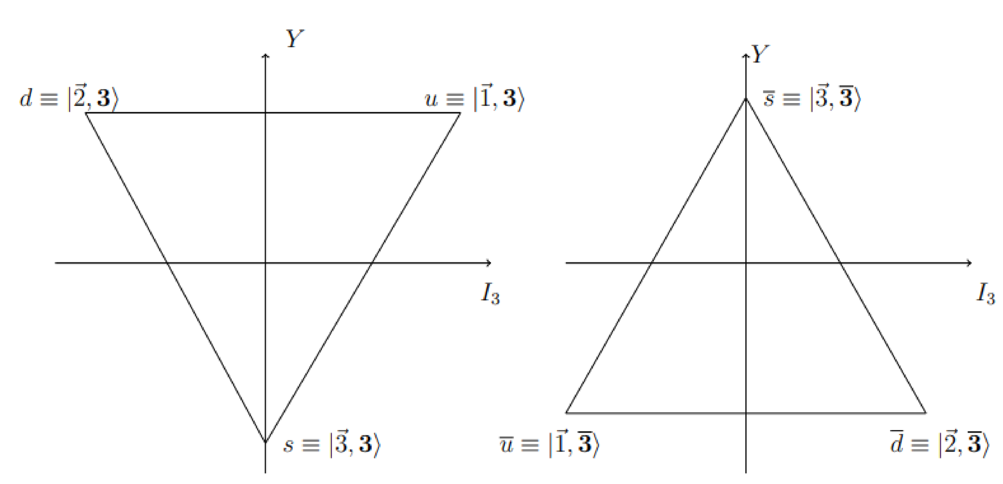



Figura 1: Diagrama de pesos da representação $D^{(3)}(1,0)\equiv\mathbf{3}$

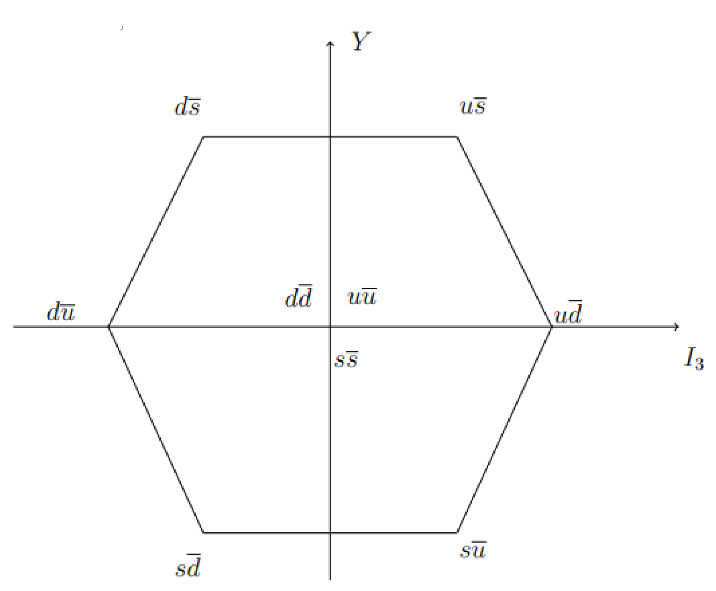
## 5. O modelo dos quarks e os multipledos do SU(3)

A ideia central do modelo dos quarks baseado no SU(3) é de associar o tripleto do SU(3) com os 3 "sabores de quars" up, down e strange, e o antitripleto aos respectivos antiquarks. Essa associação se da através dos pesos da representação $D^{(3)}(1,0)$, onde os autovalores correspondem a projeção $I_3$ do isospin e a hipercarga $Y$. Dessa forma, temos




, Figura 2: Tripleto e antitripleto dos quarks

**Mésons:** A estrutura quarkiônica dos mésons é obitida pelo produto tensorial $\mathbf{3}\otimes\mathbf{4}=\mathbf{1}\otimes\mathbf{8}$. Potantno, temos




, Figura 3: Octeto e singleto mesônico

Dessa forma, associamos os mésons aos pesos acima tal que

$$K^+=u\bar{s}\quad;\quad K^0=d\bar{s}\quad;\quad \pi^+=u\bar{d}\quad;$$

$$\pi^0=\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}+d\bar{d})\quad;\quad \pi^-=\bar{u}d\quad;\quad K^-=\bar{u}s\quad;\quad \overline{K^0}=\bar{d}s.$$

$$\eta^0\equiv|\vec{6},\mathbf{8}\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(2s\bar{s}-d\bar{d}+u\bar{u})\quad;\quad \eta'^0\equiv|\vec{1},\mathbf{1}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u}-d\bar{d}-s\bar{s}).$$

**Bárions:** A estrutura quarkiônica dos bárions é obitida pelo produto $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{10}$. O ducpleto bariônico possui a forma

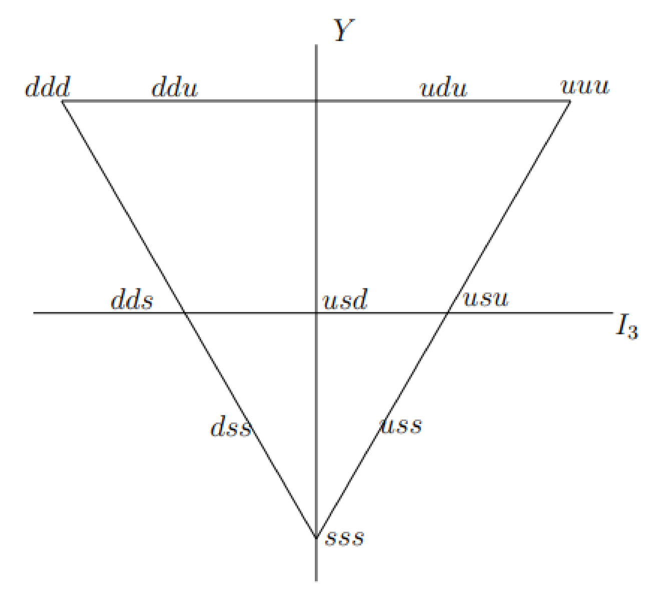



Figura 4: Ducpleto bariônico

Os estados ligados dos bárions que constituem o ducpleto $D^{10}(1,1)\equiv\mathbf{10}$ são dados por

$$\Delta^-=ddd\quad;\quad \Delta^0=\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu+udu+udd)\quad;$$

$$\Delta^+=\frac{1}{\sqrt{3}}(uud+udu+duu)\quad;\quad \Delta^{++}=uuu$$

$$\Sigma^{-*}=\frac{1}{\sqrt{3}}(dds+dsd+sdd)\quad;\Sigma^{0*}=\frac{1}{\sqrt{6}}(dsu+uds+sud+sdu+dus+usd)$$

$$\Sigma^{+*}=\frac{1}{\sqrt{3}}(uus+usu+suu)\quad;\quad \Xi^{-*}=\frac{1}{\sqrt{3}}(dss+sdd+sds)\quad;$$

$$\Xi^{0*}=\frac{1}{\sqrt{3}}(uss+ssu+sus)\quad;\quad \Omega^-=sss.$$

O octeto bariônico possui a forma

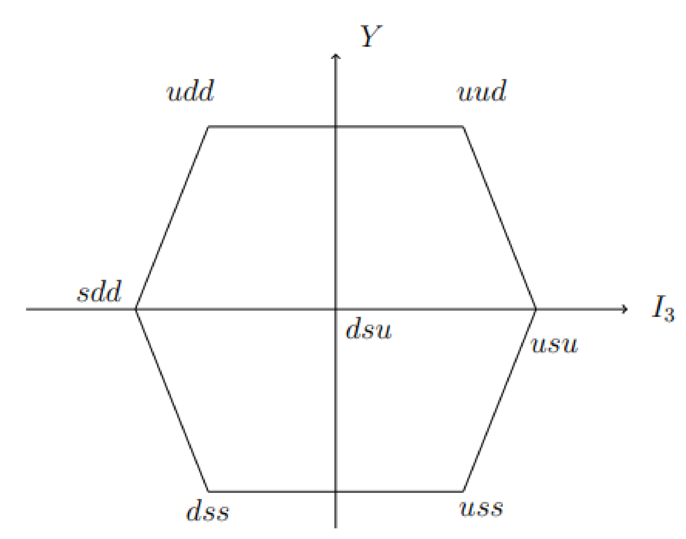



Figura 5: Octeto bariônico

Os estados ligados dos bárions que constituem o octeto $D^8(1,1)\equiv\mathbf{8}$ e o singleto $D^{(1)}(1,0)\equiv\mathbf{1}$ são dados por

$$\Delta^-=ddd\quad;\quad \Delta^0=\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu+udu+udd)\quad;\Delta^+=\frac{1}{\sqrt{3}}(uud+udu+duu)$$

$$\Delta^{++}=uuu\quad;\Sigma^{-*}=\frac{1}{\sqrt{3}}(dds+dsd+sdd);$$

$$\Sigma^{0*}=\frac{1}{\sqrt{6}}(dsu+uds+sud+sdu+dus+usd)\quad;$$

$$\Sigma^{+*}=\frac{1}{\sqrt{3}}(uus+usu+suu)\quad;\quad \Xi^{-*}=\frac{1}{\sqrt{3}}(dss+sdd+sds);$$

$$\Xi^{0*}=\frac{1}{\sqrt{3}}(uss+ssu+sus)\quad;\quad \Omega^-=sss.$$

## 6. Referências

[1] A. I. Kostrikin. *Linear Algebra and Geometry*. Gordon and Breach Science Publishers, 1997.
[2] K. Hoffman. *Linear Algebra*. Prentice-Hall, secound edition, New Jersey, 1971.
[3] B. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representation*. Springer, secound Edition,2016.
[4] J. M. F. Bassalo. *Teoria de Grupos para Físicos*. Universidade de São Paulo, 2011.
[5] J. B. Gutowski. *Symmetry and Particle Phyhsics*. Michaelmas Term, 2007.

## 7. Apoio financeiro

Este trabalho contou com apoio financeiro do PIBIC/CNPQ. Agradecemos a UFV e ao CNPQ pelo apoio e suporte.