Simpósio de Integração Acadêmica
"A Transversalidade da Ciência, Tecnologia e Inovações para o Planeta"
SIA UFV Virtual 2021

UFV Universidade Federal de Viçosa

APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Isabella Miranda Silva - Universidade Federal de Viçosa.
Edson José Teixeira - Universidade Federal de Viçosa.

Aplicações, equações diferenciais, modelagem.

1. Introdução

As equações diferenciais ordinárias são equações que envolvem derivadas de uma determinada função que descreve determinado fenômeno, ou seja, estabelece a taxa segundo a qual um determinado fenômeno acontece. Em decorrência desse fato, as equações diferenciais ordinárias configuram-se como uma importante ferramenta para modelagem de determinados problemas, o que possibilita a análise do comportamento de um fenômeno, e consequentemente obtendo-se propriedades relevantes para estudo. Hodiernamente, entretanto, no nosso cotidiano, apesar de muitas vezes não ser tão óbvio para a maioria das pessoas, evidencia-se a possibilidade da modelagem de inúmeros fenômenos físicos, químicos, ecológicos, econômicos e biológicos por intermédio do uso de equações diferenciais e consequentemente, a análise comportamental desses problemas pode ser realizada. Por conseguinte, é fulcral salientar que em alguns casos não há a possibilidade de obter-se uma fórmula explícita para a solução da equação diferencial ordinária.

2. Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo a modelagem de alguns fenômenos químicos e físicos, obtendo-se a solução e realizando uma análise desta, sendo notório a importância de considerar propriedades relevantes do problema. Serão modeladas as seguintes aplicações: o resfriamento de um corpo, a diluição de soluções, a tractriz, a catenária e o espelho parabólico.

3. Material e Métodos

O livro Equações Diferenciais Aplicadas, referência 1, foi base para a pesquisa, sendo realizada uma leitura e demonstração dos cálculos de todas as aplicações trabalhadas.

4. Resfriamento de um corpo

Evidencia-se o estudo da variação da temperatura corporal através da perda de calor para o meio ambiente. Considere que:

i) A temperatura T é a mesma em todo corpo e depende apenas do tempo t.

ii) A temperatura T_a do meio ambiente é uniforme e depende apenas do tempo t.

iii) O fluxo de calor através das paredes do corpo, dado por $\frac{dT}{dt}$ é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente. k é uma constante que dependente das propriedades físicas do corpo, $(k > 0)$.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Tomando $T(0) = T_0$ obtemos:

$$T(t) = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$$

Das equações acima podemos concluir que

i) $T(t)$ decresce monotonicamente com t se $T > T_a$.

ii) $T(t)$ cresce monotonicamente com t se $T < T_a$.

iii) $T(t)$ é constante com t se $T = T_a$.

iv) $T(t)$ tende monotonicamente para T_a quando $t \to +\infty$

5. Diluição de Soluções

Determina-se a quantidade de sal em Kg de um reservatório durante a injeção de uma solução de água salgada.

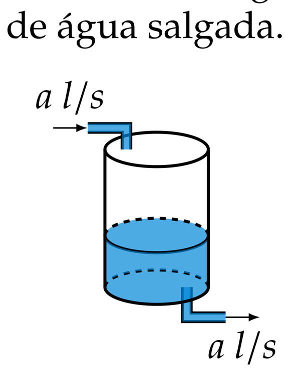

Figura 1: Problema com um tanque

i) Um reservatório com V litros de aguá pura receba, a uma razão constante de a litros por segundo, uma solução salina (c kg de sal por litro).

ii) A solução formada é homogênea.

iii) Ao mesmo tempo é retirado, a uma razão de a litros por segundo, a solução formada.

Determinaremos a quantidade de sal num tempo t. Seja $x(t)$ a quantidade de sal em kg presente no reservatório dado t. Desse modo,

$$\frac{dx}{dt} = ac - a\frac{x}{V}$$

Como $x(0) = 0$ e utilizando o método do fator integrante obtemos:

$$x(t) = cV(1 - e^{-at/V})$$

Portanto, quando $t \to \infty$ a concentração $x(t)/V$ de sal tende a c.

6. A Tractriz

Obteremos a equação para a curva no plano (x, y), em que o segmento da tangente delimitado pelo ponto de tangência pelo eixo x é constante.

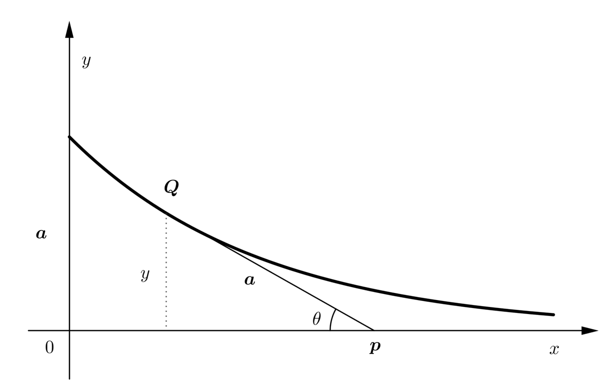

Figura 2: A Tractriz

Admita que uma partícula Q é arrastada ao longo de um plano horizontal através de uma corda tensa QP, existe atrito. Ao longo do eixo x encontra-se a extremidade P. Denomina-se tractriz a curva descrita pela partícula Q.

Consideremos que a é o comprimento do seguimento QP. Logo,

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

Que é uma equação diferencial separável. Portanto, a solução para o problema é dada por:

$$x(y) = -\sqrt{a^2 - y^2} - aln\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

7. A Catenária

Obteremos uma forma para um cabo flexível e inextensível, suspenso em dois pontos e sujeito ao próprio peso.

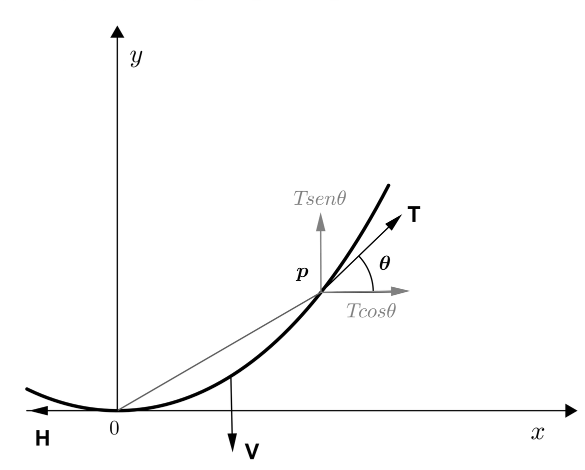

Figura 3: A Catenária

Consideremos que:

i) A origem do sistema de coordenadas cartesianas localiza-se no ponto mais baixo da curva, o eixo das ordenas coincide com a vertical.

ii) H é a tensão do cabo em seu ponto mais baixo.

iii) T é a tensão do cabo no ponto $P = (x, y)$.

iv) $V = \omega s$ é o peso do trecho OP do cabo, em que ω é o peso por unidade de comprimento e s o comprimento do arco OP.

v) $H + T + V = 0$ é o equilíbrio do trecho OP.

Realizando uma projeção da equação de equilíbrio:

$$-H + Tcos\theta = 0$$

$$-V + Tsen\theta = 0$$

Logo,

$$tg\theta = \frac{\omega}{H}s$$

Assim, obtemos uma equação separável e considerando $p(0) = y'(0) = 0$ e $y(0) = 0$:

$$y(x) = c^{-1}(cosh(cx) - 1)$$

Portanto, a solução do problema sugerido toma forma do gráfico de um co-seno hiperbólico.

8. O Espelho Parabólico

Determina-se a forma de um refletor tal qual todos os seus raios saem paralelos a uma direção fixada.

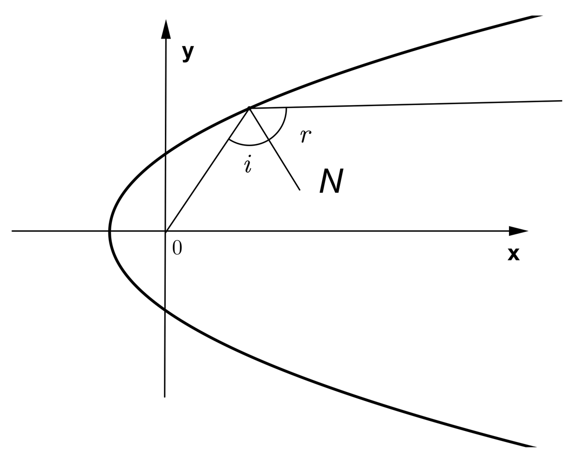

Figura 4: O Espelho Parabólico

Consideremos que:

i) A fonte luminosa localiza-se na origem do sistema cartesiano e R seja o eixo x.

ii) $y(x)$ é a função que descreve a seção longitudinal do refletor.

iii) Um raio luminoso emana da origem e reflete no ponto P.

iv) N é a reta normal à curva no ponto P.

v) O ângulo de incidência i e o ângulo de reflexão r são iguais.

Desse modo,

$$\frac{dy}{dx} = tg(90° - r)$$

$$\frac{y}{x} = tg(180° - 2r)$$

Assim,

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - (y')^2}$$

Portanto, obtemos que

$$y^2 = \pm 2xc + c^2$$

Em que,

1. O sinal + refere-se a uma parábola com concavidade para direita e vértice $(-\frac{c}{2}, 0)$.
2. O sinal - refere-se a uma parábola com concavidade para esquerda e vértice $(\frac{c}{2}, 0)$.

9. Conclusões

Desse modo, torna-se evidente a importância do uso das equações diferenciais ordinárias para modelagem e compreensão de determinados fenômenos cotidianos. Os problemas trabalhados são relevantes para os cursos de física e química, assim como para o avanço da ciência e sociedade, promovendo conhecimento integral sobre o mundo.

10. Referências

1. FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F.**Equações Diferenciais Aplicadas.** Rio de Janeiro. IMPA: Coleção Matemática Universitária, 2012.
2. DOERING, C. I.; LOPES, A. O.**Equações Diferenciais Ordinárias.** 5. ed. Rio de Janeiro. IMPA: Coleção Matemática Universitária, 2012.

11. Apoio Financeiro

Este projeto não contou com apoio financeiro de nenhuma agência de fomento.

12. Agradecimentos

Agradeçemos a todos que de alguma forma contribuíram para a realização desse trabalho. Assim como a organização do SIA UFV Virtual 2021 por possibilitar a exposição dessa pesquisa.