Classificação de 2-Variedades Topológicas Compactas

Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Matemática

Ellen Peixoto de Oliveira
ellen.peixoto@ufv.br

Rogério Carvalho Picanço (Orientador)
rogerio@ufv.br

Palavras chaves: Superfícies compactas, característica de Euler, grupo fundamental
Pesquisa
Geometria/Topologia
Matemática

1. Introdução

Uma das principais conquistas matemáticas no início do século XXI foi a demonstração da conjectura de Poincaré, feita por G. Perelman em 2006. Numa versão simplificada, a conjectura afirma que toda variedade tridimensional fechada com grupo fundamental trivial é homeomorfa a 3-esfera. A importância atribuída a conjectura de Poincaré se deve ao fato dela estar contida num problema ainda maior. A classificação de variedades topológicas n-dimensionais, para n maior que 2, um dos grandes desafios da matemática e ainda longe de uma solução.

2. Objetivos

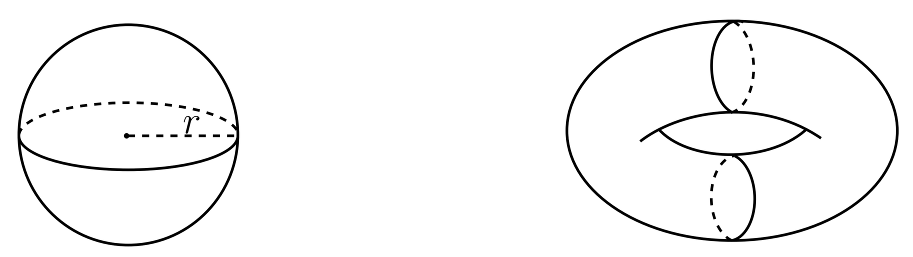
Apresentamos a classificação de variedades bidimensionais compactas orientáveis e não orientáveis. Seguimos a prova feita por H. Seifert e W. Threlfall em 1934. E por meio de triangulações obtemos invariantes topológicos como a característica de Euler e o genus.

3. Superfícies

Superfícies: Intuitivamente uma variedade bidimensional é um espaço topológico com propriedades locais similares as do plano Euclidiano. Como exemplo temos a esfera.

Superfícies Orientáveis: Uma superfície é orientável se todo caminho fechado nela contido preserva a sua orientação. Informalmente uma superfície orientável possui "dois lados": o de fora e o de dentro.

Figura 1: Superfícies Orientáveis



(a) Esfera (b) Toro

Superfícies Não Orientáveis: Uma superfície é não orientável se existe pelo menos um caminho fechado nela contido que não preserva sua orientação. Informalmente uma superfície não orientável é aquela em que não conseguimos identificar o lado de fora e o de dentro.

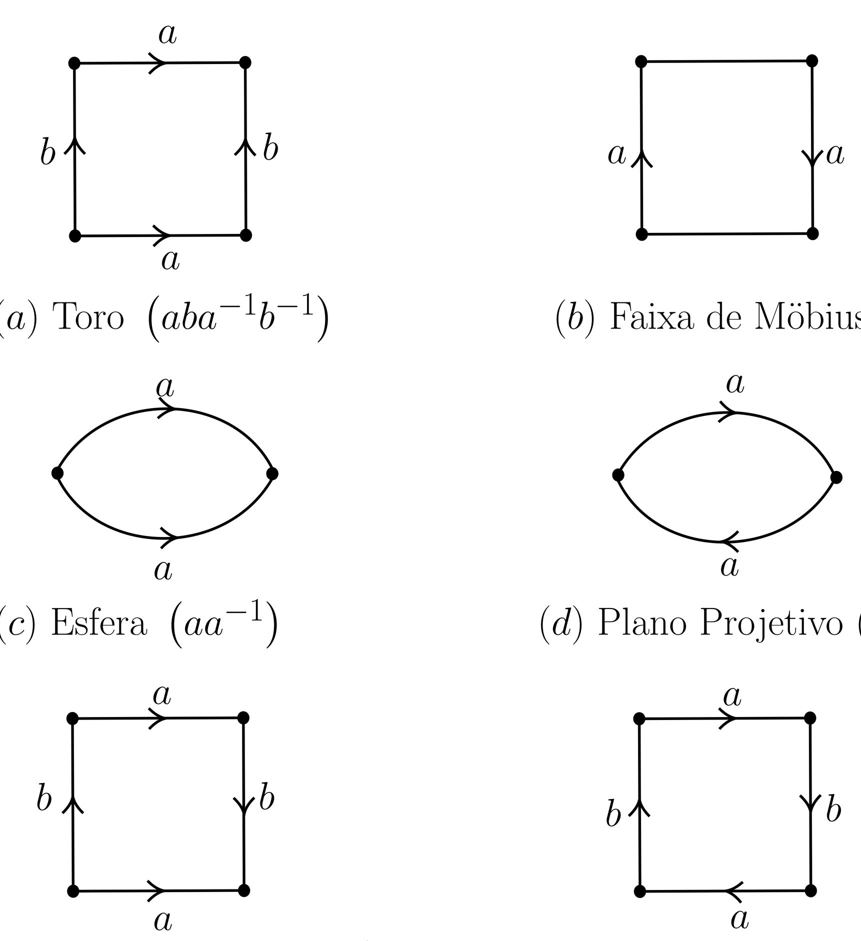
Figura 2: Superfícies Não Orientáveis

(a) Faixa de Möbius (b) Garrafa de Klein

4. Representações Poligonais

Representamos as superfícies compactas como o espaço quociente de um polígono com os lados identificados aos pares.

Figura 3: Representações Poligonais de Algumas Superfícies



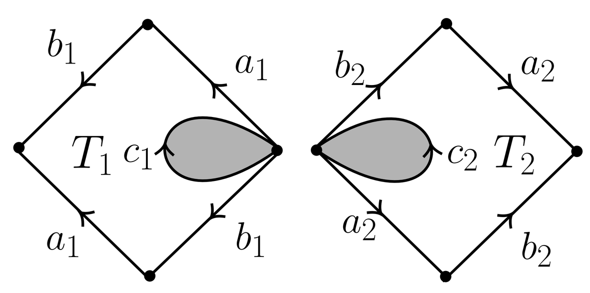
(a) Toro $(aba^{-1}b^{-1})$ (b) Faixa de Möbius
(c) Esfera (aa^{-1}) (d) Plano Projetivo (aa)
(e) Garrafa de Klein $(aba^{-1}b)$ (f) Plano Projetivo $(abab)$

5. Somas Conexas

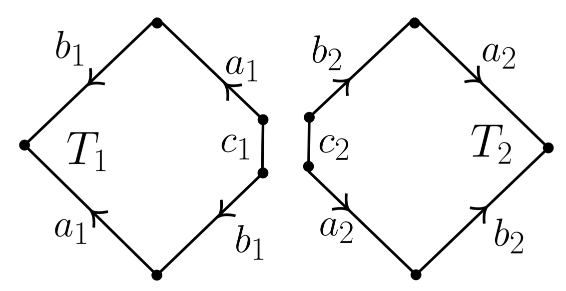
Sejam S_1 e S_2 duas superfícies. A soma conexa denotada por $S_1\#S_2$ é obtida retirando uma região circular em ambas superfícies e depois colando o complementar da região removida.

▸ ***Soma Conexa de Toros ($T_1\#T_2$)***

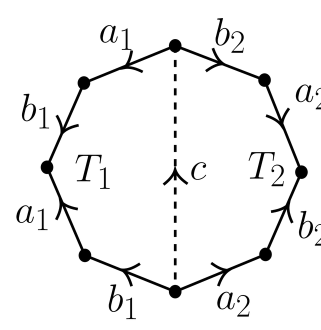
Figura 4: Soma Conexa de Toros



(a) Remova a região circular cinza nos toros T_1 e T_2.



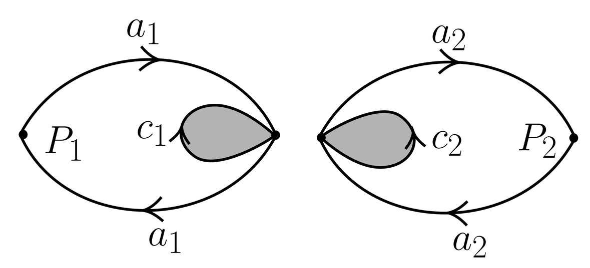
(b) Considere o complementar da região cinza retirada.



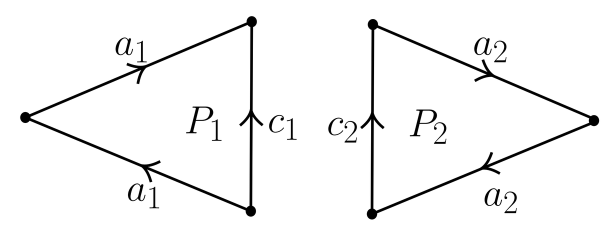
(c) Cole ambas as regiões obtidas anteriormente.

▸ ***Soma Conexa de Planos Projetivos ($P_1\#P_2$)***

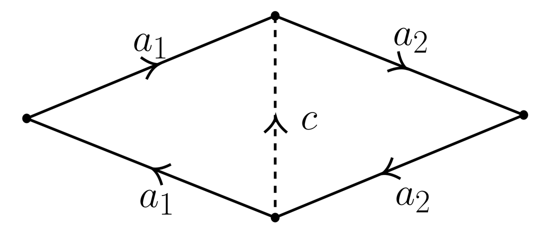
Figura 5: Soma Conexa de Planos Projetivos



(a) Remova a região circular cinza nos planos projetivos P_1 e P_2.



(b) Considere o complementar da região cinza retirada.



(c) Cole as duas regiões obtidas anteriormente..

▸ ***Algumas Curiosidades da Soma Conexa***

1. A garrafa de Klein é a soma conexa de dois planos projetivos.
2. A soma conexa de superfícies orientáveis é uma superfície orientável.
3. A soma conexa que contenha pelo menos uma superfície não orientável é uma superfície não orientável.

6. Triangulações

Afirmamos que toda superfície compacta admite triangulação, isto é, toda superfície S pode ser dividida em regiões triangulares seguindo alguns critérios naturais. [2]

▸ ***Algumas Triangulações***

Figura 6: Toro

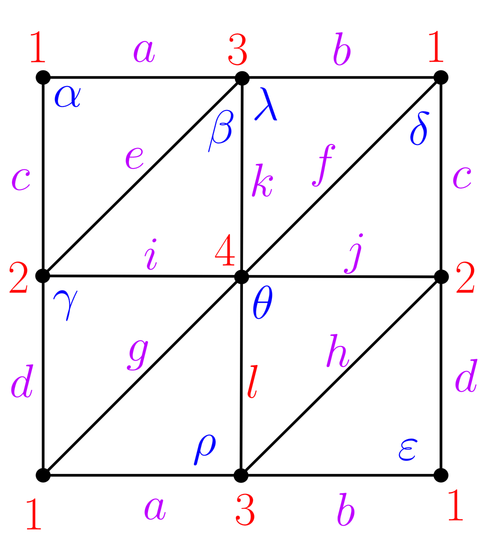
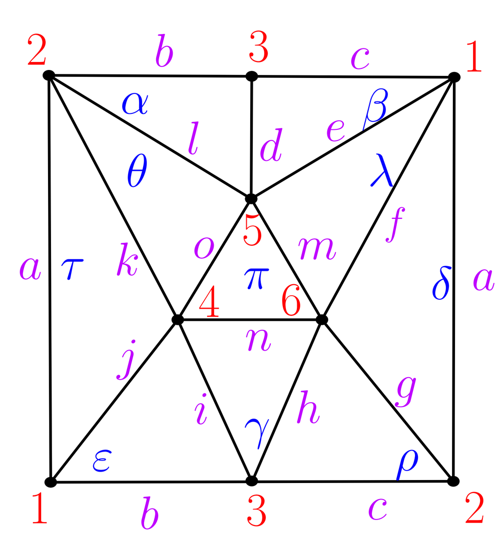


Figura 7: Plano Projetivo



7. Característica de Euler e Genus

A característica de Euler é um invariante topológico importante para a classificação de superfícies.

Característica de Euler: A característica de Euler de S é:

$$\chi(S) = V - A + T,$$

onde S é uma superfície compacta triangularizada, V o número de vértices, A o número de arestas e T o número de triângulos em S.

▸ ***Característica de Euler do Toro***

Pela figura 6 temos $V = 4$, $A = 12$ e $T = 8$. Portanto $\chi(\mathbb{T}) = 0$.

▸ ***Característica de Euler do Plano Projetivo***

Pela figura 7 temos $V = 6$, $A = 15$ e $T = 10$. Logo $\chi(\mathbb{P}) = 1$.

▸ ***Característica de Euler da Soma Conexa***

Sejam S_1 e S_2 superfícies. Assim $\chi(S_1\#S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$.

▸ ***Característica de Euler de Algumas Superfícies***

Quadro 1: Características de Euler de Algumas Superfícies

Superfície	Característica de Euler
Esfera	2
Soma Conexa de n Toros	$2-2n$, $n \in \mathbb{N}^*$
Soma Conexa de n Planos Projetivos	$2-n$, $n \in \mathbb{N}^*$
Soma Conexa de 1 Plano Projetivo e n Toros	$1-2n$, $n \in \mathbb{N}^*$
Soma Conexa de 1 Toro e n Planos Projetivos	$-n$, $n \in \mathbb{N}^*$
Soma Conexa de 1 Garrafa de Klein e n Toros	$-2n$, $n \in \mathbb{N}^*$

O genus é um invariante topológico importante para relacionar as curvas algébricas complexas com as superfícies compactas.

Genus: Uma superfície que é a soma conexa de n toros ou n planos projetivos é dita de genus n. Já a esfera é de genus 0.

▸ ***Característica de Euler e Genus***

A característica de Euler e o genus se relacionam pela seguinte fórmula:

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-\chi) & \text{para superfícies compactas orientáveis} \\ 2-\chi & \text{para superfícies compactas não orientáveis} \end{cases}$$

Teorema 1. Duas superfícies S_1 e S_2 são homeomorfas se, e somente se, possuem a mesma característica de Euler, são ambas orientáveis ou não orientáveis.

Teorema 2. Toda superfície compacta é homeomorfa ou a esfera, ou a soma conexa de toros ou a soma conexa de planos projetivos.

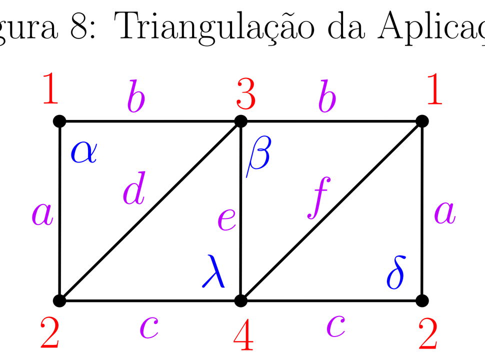
▸ ***Aplicação***

Seja a superfície S identificada pela seguinte triangulação:

123 234 341 412

Desta forma, o esquema da triangulação é dada por:

Figura 8: Triangulação da Aplicação



Pela figura 8 obtemos $V = 4$, $A = 6$ e $T = 4$. Isto implica $\chi(S) = 2$, consequentemente pelo teorema 1 e quadro 1 sabemos que a superfície dada é homeomorfa a uma esfera.

8. Conclusão

O trabalho encontra-se em andamento. As próximas etapas serão o cálculo do grupo fundamental das superfícies acima e a médio prazo estabelecer a correlação com as curvas algébricas complexas.

9. Bibliografia

[1] E. L. Lima, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, 2018.

[2] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer, 1990.