Simpósio de Integração Acadêmica
"A Transversalidade da Ciência, Tecnologia e Inovações para o Planeta"
SIA UFV Virtual 2021

UFV
Universidade Federal de Viçosa

Números na categoria de conjuntos

Joice Graziele Martins da Silva - Universidade Federal de Viçosa - Departamento de Matemática - joice.graziele@ufv.br
Rogério Carvalho Picanço - Universidade Federal de Viçosa - Departamento de Matemática - rogerio@ufv.br

Trabalho de pesquisa em Álgebra - Ciências Exatas e tecnológicas
Palavras-chave: números, teoria de conjuntos, teoria de categorias

Introdução

Os números são de suma importância para a matemática, desde suas origens até os dias atuais. Algumas das comparações que o homem formula, estão ligadas conscientes ou não, às noções aritméticas. A princípio pela necessidade de contagens de coleções, como por exemplo dos animais de criação, e até mesmo conceito de acréscimos. Muito tempo depois, os números inteiros e racionais surgiram de forma intuitiva, e já na Grécia Antiga, através da descoberta do $\sqrt{2}$, os números reais apareceram. Em 1889, Guiseppe Peano apresentou em *Arithmetica Principia Nova Methodo Exposita* pela primeira vez, uma construção axiomática dos números naturais. O nosso interesse é expressar tais axiomas em termos de conjuntos e funções, por isso, admitiremos que existe um conjunto $\mathbb{N}$ e uma função σ definida por $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. E será com essa abordagem que iniciaremos a construção dos números na Teoria de Conjuntos. A princípio estruturaremos os Números Naturais com todas suas características algébricas, incluindo as operações de soma, produto e uma relação de ordem. Todas elas bem definidas. A partir do Naturais, usaremos convenientes relações de equivalencia para a construção dos Inteiros e Racionais. E de modo analogo ao feito para os Naturais, as propriedades de soma, produto e relações de ordem serão introduzidas. E para construírmos os Números Reais, utilizaremos uma abordagem mais sofisticada, os Cortes de Dedekind, e por fim apresentar algumas propriedades importantes de tal estrutura.

Números naturais

Axiomas de Peano

***P.1*:** Existe um elemento em $\mathbb{N}$, que denotaremos por 0 e chamaremos de zero, que não está na imagem de σ, isto é, $0 \notin Im(\sigma)$.

***P.2*:** A função σ é injetora.

***P.3*:** Seja A um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

I) $0 \in \mathrm{A}$.

II) Se $n \in \mathrm{A}$, então $\sigma(n) \in \mathrm{A}$.

Então, $\mathrm{A} = \mathbb{N}$.

Proposição 1.1. $Im(\sigma) = \mathbb{N}^{+}$.

Definição 1.2. Dado um natural $n \neq 0$, temos que o número natural m, tal que $\sigma(m) = n$, chama-se antecessor de n e, n chama-se sucessor de m.

Operações com elementos de $\mathbb{N}$

Definição 1.3. (Soma) Sejam m e n números naturais. Definiremos a soma do seguinte modo:

I) $m + 0 = m$

II) $m + \sigma(n) = \sigma(m + n)$

Definição 1.4. (Produto) Sejam $m \in \mathbb{N}$, um número natural dado. Definiremos o produto como:

I) $m \cdot 0 = 0$

II) $m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m$

Proposição 1.5. *Seja $m \in \mathbb{N}$ um número natural dado. Então a soma $m + n$ e o produto $m \cdot n$ estão definidas para todo natural $n \in \mathbb{N}$.*

Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

Definição 1.6. Sejam m e n números naturais. Diremos que m é menor ou igual a n, se existir um r natural tal que $m + r = n$.

Esta relação é uma relação de ordem, ou seja, é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Teorema 1.7 (Princípio da Boa Ordem)**.** *Todo subconjunto não vazio de números naturais, possui um menor elemento.*

Números inteiros

Definição 1.8. Sejam $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Diremos que $(a, b) \sim (c, d)$ se e somente se $a + d = b + c$.

Teorema 1.9. *A relação definida acima é de equivalência, ou seja, ela é reflexiva, simétrica e transitiva.*

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \text{ x } \mathbb{N} \mid (x, y) \sim (a, b)\}.$$

Definição 1.10. Vamos denotar por $\mathbb{Z}$ o conjunto $\mathbb{N} \text{ x } \mathbb{N}/\sim$ e chamar de números inteiros, os elementos desse conjunto.

Operações com elementos de $\mathbb{Z}$

Definição 1.11. Sejam $\alpha = \overline{(a, b)}$ e $\beta = \overline{(c, d)}$ elementos de $\mathbb{Z}$. Definimos a soma de $\alpha + \beta$ e o produto $\alpha \cdot \beta$ por

$$\alpha + \beta = \overline{(a + c, b + d)}$$
$$\alpha \cdot \beta = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$$

Relação de ordem em $\mathbb{Z}$

Definição 1.12. Dados os números inteiros $\alpha = \overline{(a, b)}$ e $\beta = \overline{(c, d)}$, diremos que α é menor ou igual a β se $a + d \leqslant b + c$.

Teorema 1.13 (Princípio da Boa Ordem)**.** *Seja $\mathrm{A} \subset \mathbb{Z}$ um conjunto não vazio de inteiros não negativos. Então, A contém um elemento mínimo, ou seja, $\exists a_0 \in \mathrm{A}$ tal que $a_0 \leqslant a$, $\forall a \in \mathrm{A}$.*

Números racionais

Definição 1.14. Sejam $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$. Definimos a relação $\sim$ por $(a, b) \sim (c, d)$ quando $ad = bc$. Esta relação é de equivalência.

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \text{ x } \mathbb{Z}^* | (x, y) \sim (a, b)\}$$

Definição 1.15. Indicaremos por $\mathbb{Q}$, o conjunto $\mathbb{Z} \text{ x } \mathbb{Z}^*/\sim$ e chamaremos de Números Racionais os elementos de $\mathbb{Q}$.

Operações com elementos de $\mathbb{Q}$

Definição 1.16. Sejam $\alpha = \frac{a}{b}$ e $\beta = \frac{c}{d}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Definimos a soma de α e β e o produto da seguinte forma:

$$\alpha + \beta = \frac{ad + bc}{bd}$$
$$\alpha\beta = \frac{ac}{bd}.$$

Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Definição 1.17. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais com $b, d > 0$. Dizemos que $\frac{a}{b}$ é menor ou igual a $\frac{c}{d}$ quando $ad \leqslant bc$ e denotamos por $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$. Esta relação está bem definida e é de ordem.

Teorema 1.18. *A função $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, definida por $i(n) = \frac{n}{1}$ é injetora e preserva as operações e relações de ordem de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ no seguinte sentido:*

1. $i(m + n) = i(m) + i(n)$

2. $i(m \cdot n) = i(m) \cdot i(n)$

3. Se $m \leqslant n$, então $i(m) \leqslant i(n)$.

Números reais

Cortes de Dedekind

Definição 1.19. Seja $\mathrm{A} \subset \mathrm{Q}$. Dizemos que A é um Corte de Dedekind se possui as seguintes propriedades:

I) $\mathrm{A} \neq \mathbb{Q}$.

II) Dado que $x \in \mathrm{A}$, se $y \in \mathbb{Q}$ e $x \leqslant y$, então $y \in \mathrm{A}$.

III) Dado que $x \in \mathrm{A}$, existe $y \in \mathrm{A}$ tal que $y < x$.

Lema 1.20. *Sejam A, $\mathrm{b} \subset \mathbb{Q}$, então as seguintes afirmações são válidas:*

I) O conjunto definido por $\mathrm{M} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r = a + b,\ a \in \mathrm{A} \text{ e } b \in \mathrm{B}\}$ é um Corte de Dedekind.

II) O conjunto $\mathrm{M} = \{r \in \mathbb{Q} \mid -r < c \text{ para algum } c \in \mathbb{Q} - \mathrm{A}\}$ é um Corte de Dedekind.

III) Seja $0 \in \mathbb{Q} - \mathrm{A}$ e $0 \in \mathbb{Q} - \mathrm{B}$. O conjunto $\mathrm{M} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r = ab,\ a \in \mathrm{A} \text{ e } b \in \mathrm{B}\}$ é um Corte de Dedekind.

IV) Suponha que exista $q \in \mathbb{Q} - \mathrm{A}$ tal que $q > 0$. o Conjunto definido por $\mathrm{M} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0 \text{ e } \frac{1}{r} < c, \text{ para algum } c \in \mathbb{Q} - \mathrm{A}\}$ é um Corte de Dedekind.

Construção dos números reais

Definição 1.21. O conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, é definido por:

$$\mathbb{R} = \{\mathrm{A} \subseteq \mathbb{Q} \mid \mathrm{A} \text{ seja um Corte de Dedekind}\}$$

Conclusão

Finalizamos assim a construção dos números na Teoria dos Conjuntos. Partimos dos três Axiomas de Peano, com o objetivo de estruturar os Números Naturais com todas suas características algébricas, incluindo as operações de soma, produto e uma relação de ordem. Todas elas bem definidas.

A partir disso, fizemos a construção dos Números Inteiros e Racionais apoiando-se na construção dos Naturais com o auxílio de convenientes relações de equivalência. E de modo analogo ao feito para os Naturais, introduzimos as propriedades de soma, produto e relações de ordem.

Já a construção dos Números Reais, utilizamos uma abordagem mais sofisticada, com os Cortes de Dedekind e novamente inserimos algumas propriedades importantes de tal estrutura.

Referências bibliográficas

1 MILIES, F. C. P. e COELHO S. P. *Números: Uma Introdução Matemática*. 3. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.(Acadêmica: 20).

2 MACHADO, G. M. *A construção dos números*. São Carlos, 2014: (Trabalho de Conclusão do Curso).

3 PONTES, K. M. *Existência e unicidade dos números reais via Corte de Dedekind*. João Pessoa, 2014. (Dissertação (Mestrado) UFPB/CCEN).

Apoio financeiro

CNPq - Centro Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico