Simpósio de Integração Acadêmica
Inteligência Artificial: A Nova Fronteira da Ciência Brasileira
SIA UFV Virtual 2020

Sobre o estudo topológico de fluxos em superfícies compactas

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA *CAMPUS* FLORESTAL

Mariana Renata Barbosa (Bolsista)
Justino Muniz Júnior (Orientador)

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

Categoria: Pesquisa; Ciências exatas e da terra, Matemática

Introdução

Em um dado sistema dinâmico, encontrar os conjuntos limite das órbitas do fluxo é essencial para obter propriedades qualitativas interessantes. O Teorema de Poincaré-Bendixson classifica todos os conjuntos limite de um fluxo definido no plano ou na esfera bidimensional. Em superfícies compactas, esse problema é bem mais complexo. A característica de Euler de uma superfície compacta é um invariante topológico que desempenha um papel fundamental em várias áreas da matemática. O Teorema de Poincaré-Hopf relaciona a característica de Euler com a soma dos índices de um campo numa singularidade hiperbólica.

Objetivos

Introduzir a bolsista na pesquisa científica na área de Sistemas Dinâmicos, abordando-a com o referencial teórico necessário para a compreensão dos conceitos e resultados da teoria de fluxos em superfícies compactas e suas aplicações.

Material e Métodos

A metodologia utilizada foram encontros semanais com duração de 2 horas com o orientador para apresentação e discussão de tópicos previamente selecionados e estudados.

Resultados e Discussão

Considere Δ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e X um campo vetorial de classe C^k, $k \geq 1$ em Δ. E seja γ_p^+ a semi-órbita positiva por p.

Teorema (Poincaré-Bendixson): Seja $\varphi(t) = \varphi(t,p)$ uma curva integral de X, definida para todo $t \geq 0$, tal que γ_p^+esteja contida num compacto $K \subset \Delta$. Suponha que o campo X possua um número finito de singularidades em $\omega(p)$. Têm-se as seguintes alternativas:

1. Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.
2. Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste em um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando $t \to \pm\infty$.
3. Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.

O número $\chi(P) = v - e + f$ onde P é um poliedro com v vértices, e arestas e f faces é chamado de característica de Euler.

Teorema (Poincaré-Hopf): Se M é uma superfície orientada e compacta e X é um campo vetorial com singularidades $p_1, \dots, p_k$, todas isoladas, então:

$$\chi(M) = \sum ind_{p_i}(X) \qquad (1)$$

Conclusões

A área de Sistemas Dinâmicos é recente na matemática e possui grande diversidade de temas para pesquisa. Realizamos um estudo da teoria de fluxos em superfícies compactas e provamos vários resultados importantes. Uma consequência do teorema de Poincaré-Hopf é que a esfera bidimensional não admite um campo sem singularidades.

Bibliografia

[1] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[2] PERDIGÃO, Manfredo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro, 2005.

[3] GODBILLON, Claude. *Dynamical Systems on Surfaces*. Springer-Velag, Berlim Heidelberg.

Apoio Financeiro

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Agradecimentos

Este trabalho contou com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Cnpq).