Simpósio de Integração Acadêmica

Inteligência Artificial: A Nova Fronteira da Ciência Brasileira

SIA UFV Virtual 2020

UFV
Universidade Federal de Viçosa

Um estudo sobre a diagonalização de operadores

Universidade Federal de Viçosa – UFV

Lídio Antônio de Oliveira Júnior
Prof. Dr. Vagner Rodrigues de Bessa

Autovetor , Diagonalização, Operador linear

Introdução

A Álgebra Linear é uma importante ferramenta matemática pois sua maior relevância está em suas diversas aplicações que transitam em muitas áreas do conhecimento. É comumente, que em algum momento da resolução de um problema matemático, o profissional depara-se com uma aplicação linear e/ou com matrizes a ele associadas. Diante disso, torna-se significativo encontrar uma base do espaço vetorial na qual a matriz de um determinado operador linear seja a mais simples possível. Isto é, dado uma aplicação linear $T : V \rightarrow V$, deve-se obter uma base β de V na qual a matriz da aplicação nesta base ($[T]^{\beta}_{\beta}$) seja uma matriz diagonal, que por sua vez é a forma mais simples de se representar um operador. Esse processo é cognominado diagonalização.

Objetivos

Compreender as bases da Álgebra Linear fundamentais para o estudo da Diagonalização de Operadores e de forma especial os conceitos de Autovetores, Autovalores afim de explorar alguns problemas aplicados.

Material e Métodos

Por intermédio de estudos dirigidos vinculados a reuniões semanais com o orientador, sucedeu-se a elaboração metodológica e cronológica do projeto de pesquisa e posteriormente sua execução. Dessa maneira, os assuntos a serem investigados eram indicados previamente e discutidos após um determinado período de tempo, no qual eram realizados os estudos individuais e resolução de exercícios. Os materiais utilizados durante a execução do projeto consistiu-se de livros didáticos, programas computacionais e artigos científicos.

Resultados e Discussão

Definição: Uma matriz quadrada A é dita diagonalizável se existir uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.
Definição: Uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ é chamada operador linear quando os espaços vetoriais V e W são iguais e se atender a essas condições: Para quaisquer vetores v, w ∈ V, temos T(v+w) = T(v) +T(w) e para quaisquer escalar k e vetor v ∈ V, temos T(kv) = kT(v).

Exemplo: Seja o operador linear T sobre $P_2(R)$ definido por:

$$T(p(x)) = xp'(x) + p''(x)$$

O operador T é diagonalizável?
A base canônica desse operador é $\beta = \{x^2, x, 1\}$. Portanto a matriz $[T]_\beta$ que representa T é:

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir do conceito de autovetor e autovalor pode-se deduzir que:

$$A.\vec{v} = \lambda.\vec{v}$$

$$A.\vec{v} - \lambda.\vec{v} = 0$$

$$A.\vec{v} - \lambda.I.\vec{v} = 0$$

$$(A - \lambda.I).\vec{v} = 0$$

Para que este sistema homogêneo admita soluções não-nulas, $\det(A - \lambda.I) = 0$ .Diante disso obtém-se os autovalores $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$ e os autovetores associados v_1=(cx2 +c), v_2 = (cx) e v_3 = c respectivamente, onde c é um escalar. P é uma matriz cujas colunas são os autovetores de $[T]_\beta$. Como os autovalores são distintos o conjunto B={v_1, v_2,v_3} forma a base de $P_2(R)$ e portanto a matriz P é diagonalizável.

Conclusões

Sempre que um operador linear tiver autovalores diferentes, conjunto formado pelos autovetores associados será uma base.
T é um operador **diagonalizável** se existe uma base ordenada β para V tal que $[T]^{\beta}_{\beta}$ é uma matriz diagonal.

Bibliografia

[1] PULINO, Petronio, Álgebra Linear e suas Aplicações - Notas de Aula Departamento de Matemática Aplicada. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas.

Apoio Financeiro

PIBIC CNPq

Agradecimentos

Presto meus agradecimentos ao Prof. Dr. Vagner Rodrigues de Bessa pela oportunidade concedida, como também a UFV pelos recursos materiais e ao PIBIC/CNPq pelo apoio financeiro.