Espaços de Sobolev na Reta e Aplicações

Simpósio de Integração Acadêmica
Inteligência Artificial: A Nova Fronteira da Ciência Brasileira
SIA UFV Virtual 2020

Universidade Federal de Viçosa - UFV
Gabriela Moraes – DMA/UFV – gabriela.moraes@ufv.br
Edson José Teixeira - DMA/UFV - edson.teixeira@ufv.br (orientador)
Trabalho de Pesquisa em Matemática

1. Introdução

A partir do estudo de tópicos de Teoria da Medida, podem ser construídas ferramentas que culminam na teoria de integração e na obtenção de inequações, úteis no atingimento de estimativas. Mais ainda, o estudo da derivada fraca nos permite definir os espaços de Sobolev que é um espaço mais amplo que engloba uma classe maior de funções que não necessariamente possuem derivadas no sentido clássico.

2. Objetivos

Conhecendo os Espaços de Sobolev, podemos procurar soluções, no sentido fraco, de alguns problemas de valor inicial, sem a exigência de que a solução procurada seja clássica. Os dados iniciais também fazem parte destes espaços de derivada fraca. A unicidade de solução também é obtida sob certas condições.

3. Metodologia

Foram estudados os tópicos propostos pelo orientador, apresentando ao mesmo os progressos obtidos durante a semana. Além disso, foram realizadas reuniões semanais com o orientador, onde esclareceram-se dúvidas.

4. Espaço L^p

Definição 1. *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}$ e $1 \le p < +\infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensuráveis; } \int_\Omega |f|^p \, d\mu(x) < +\infty \right\},$$

munido da norma

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f|^p \, d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 2.

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensuráveis; } |f(x)| \le C \text{ q.t.p. em } \Omega \},$$

munido da norma

$$\|f\|_\infty = \inf\{C;\ |f(x)| \le C,\ \text{q.t.p. } x \in \Omega\}.$$

Teorema 1 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $p > 1$ e $p' > 1$ reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dados $a \ge 0$ e $b \ge 0$ então vale*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

valendo a igualdade se $a^p = b^{p'}$.

Teorema 2 (Desigualdade de Holder)**.** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, com $p,\ p' > 0$ e tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, com $1 \le p \le \infty$. Então $f,\ g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int |fg| \le \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

A partir deste momento, o trabalho ficará restrito apenas a intervalos I da reta real.

Teorema 3. *O espaço $L^p(I)$ é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_p$ é uma norma para todo p, com $1 \le p \le +\infty$.*

Definição 3. *Seja E um espaço vetorial normado. Diremos que E é um espaço de Banach se para qualquer sequência de Cauchy $(x_n) \subset E$, tem-se $x_n \to x \in E$.*

Teorema 4. *Sejam $(f_n) \subset L^p(I)$ e $f \in L^p(I)$ tais que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Então existem $(f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ e $h \in L^p(I)$ tais que*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p. $x \in I$;

(ii) $|f_{n_k}(x)| \le h(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, q.t.p. $x \in I$.

5. Convolução e Regularização

Definição 4. *Sejam f e g funções mensuráveis em $\mathbb{R}$. A convolução entre f e g é definida por $(f * g)(x) = \int_\mathbb{R} f(x-y) \cdot g(y)\, dy$, para todo $x \in \mathbb{R}$ onde a integral existe.*

Teorema 5. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le +\infty$. Então para quase todo $x \in \mathbb{R}$, a função*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto f(x-y)g(y) \end{aligned}$$

é integrável. Desta forma, para q.t.p. $x \in \mathbb{R}$ temos que $(f * g)$ está definida. Além disso, $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$.

Teorema 6. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$ e $h \in L^{p'}(\mathbb{R})$. Defina $\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\overline{f}(x) = f(-x)$. Então*

$$\int_\mathbb{R} (f * g)(x) \cdot h(x)\, dx = \int_\mathbb{R} g(y)(\overline{f} * h)(y)\, dy.$$

Teorema 7. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Considere a família $(w_i)_{i \in I}$ de abertos em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ q.t.p. $x \in w_i$, para todo $i \in I$. Seja $W = \bigcup_{i \in I} w_i$. Então $f = 0$ q.t.p. $x \in W$.*

Teorema 8. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$, com $1 \le p \le +\infty$. Então*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g).$$

Definição 5. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ aberto e $1 \le p \le +\infty$. Diremos que f é localmente p-integrável em I, e escreveremos $f \in L^p_{loc}(I)$, se $f \cdot \chi_K \in L^p(I)$, para qualquer compacto $K \subset I$.*

Lema 1. *Sejam p, q tais que $1 \le q < p \le +\infty$. Se $f \in L^p_{loc}(I)$, então $f \in L^q_{loc}(I)$.*

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um aberto. Denotamos

$$\begin{aligned}
C^0(I) &= C(I) = \{f : I \to \mathbb{R};\ f \text{ é contínua em } I\}; \\
C^k(I) &= \{f : I \to \mathbb{R};\ f \text{ é } k \text{ vezes derivável com derivadas contínuas em } I\}; \\
C^\infty(I) &= \textstyle\bigcap_{k=0}^\infty C^k(I); \\
C^0_c(I) &\equiv C_c(I) = \{f : I \to \mathbb{R};\ f \text{ é contínua e tem suporte compacto em } I\}; \\
C^k_c(I) &= C^k(I) \cap C_c(I); \\
C^\infty_c(I) &= C^\infty(I) \cap C_c(I).
\end{aligned}$$

Teorema 9. *Sejam $f \in C_c(\mathbb{R})$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Então $(f * g)(x)$ está bem definida para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e além disso $f * g \in C(\mathbb{R})$.*

Teorema 10. *Se $f \in C^k_c(\mathbb{R})$, com $k \ge 1$, e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, então $(f * g) \in C^k(\mathbb{R})$ e*

$$\frac{d^n}{dx^n}(f * g) = \left(\frac{d^n}{dx^n} f \right) * g,$$

para todo $n \ge 0$.

Definição 6. *Uma sequência regularizante $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções $\rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$\rho_n \in C^\infty_c(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}(\rho_n) \subset [-1, 1] \text{ e } \int_\mathbb{R} \rho_n dx = 1.$$

Teorema 11. *Seja $f \in C(\mathbb{R})$. Então $(\rho_n * f) \to f$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}$.*

Teorema 12. *Se $f \in L^p(\mathbb{R})$, com $1 \le p < \infty$, então $(\rho_n * f) \to f$ em $L^p(\mathbb{R})$.*

Corolário 1. *Seja I um aberto de $\mathbb{R}$. Então $C^\infty_c(I)$ é denso em $L^p(I)$, para cada $1 \le p < \infty$.*

6. Espaço de Sobolev

Definição 7. *Seja $I = (a, b)$ um intervalo aberto, definimos por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I);\ \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi,\ \forall \varphi \in C^1_c(I) \right\}.$$

Neste caso, diremos que g é a derivada fraca de u e escrevemos $u' = g$. Denotaremos também por $H^1(I) = W^{1,2}(I)$.

Proposição 1. *O espaço $W^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach para $1 \le p \le \infty$, é reflexivo para $1 < p < \infty$ e é separável para $1 \le p < \infty$. Em particular, H^1 é um espaço de Hilbert separável.*

Teorema 13. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \le p \le \infty$, com I limitado ou não, então existe $\overline{u} \in C(I)$ tal que $u = \overline{u}$ e*

$$\overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_y^x u'(t)\ dt,\ \forall x,\ y \in I.$$

Lema 2. *Seja $f \in L^1_{loc}(I)$ e tal que*

$$\int_I f\varphi' = 0, \forall \varphi \in C^1_c(I).$$

Então existe uma constante c tal que $f = c$ q.t.p. em I.

Lema 3. *Seja $g \in L^1_{loc}(I)$ para y_0 fixado em I*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)\ dt,\ x \in I,$$

então $v \in C(I)$ e

$$\int_I v\varphi' = \int_I g\varphi,\ \forall \varphi \in C^1_c(I).$$

Teorema 14. *Seja $u \in L^p(I)$ com $1 < p < \infty$, as seguintes propriedades são equivalentes*

(i) $u \in W^{1,p}(I)$;

(ii) existe uma constante C tal que

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \le C\|\varphi\|_{p'},\ \forall \varphi \in C^1_c(I).$$

Além disso, nos temos que $C = \|u'\|_p$.

Teorema 15. *Uma função $u \in L^\infty(I)$ pertence a $W^{1,\infty}(I)$ se, e somente se, existe uma constante c tal que*

$$|u(x) - u(y)| \le c|x - y|,$$

para $x,\ y$ q.t.p. em I.

Teorema 16. *Seja $u \in L^p(\mathbb{R})$ com $1 < p < \infty$. As seguintes propriedades são equivalentes*

(i) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$;

(ii) existe uma constante c tal que para todo $h \in \mathbb{R}$

$$\|u(x+h) - u(x)\|_p \le c|h|.$$

Além disso, podemos tomar $c = \|u'\|_p$.

Teorema 17 (Operador extensão)**.** *Seja $1 \le p \le \infty$. Existe um operador linear limitado $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$, chamado operador extensão, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $Pu|_I = u,\ \forall u \in W^{1,p}(I)$;

(ii) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \le c\|u\|_{L^p(I)},\ \forall u \in W^{1,p}(I)$;

(iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \le c\|u\|_{W^{1,p}(I)},\ \forall u \in W^{1,p}(I)$,

onde c depende apenas do intervalo I, que é limitado ou $I = (0, +\infty)$.

Teorema 18 (Densidade)**.** *Seja $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \le p < +\infty$. Então existe $(u_n) \subset C^\infty_c(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \to u$ em $W^{1,p}(I)$, quando $n \to +\infty$.*

Teorema 19 (Imersões de Sobolev)**.** *Seja I intervalo de $\mathbb{R}$.*

(i) $\|u\|_{L^\infty(I)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, para todo $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \le p \le +\infty$. Se $u \in W^{1,p}(I)$, então $u \in L^\infty(I)$. ($W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$)

(ii) Se $|I| < \infty$, então $W^{1,p}(I)$ está imerso compactamente em $C(\overline{I})$, para $1 < p \le \infty$. Isto significa que toda sequência limitada $(u_n) \subset W^{1,p}(I)$ possui subsequência convergente em $C(\overline{I})$.

(iii) Se $|I| < \infty$, então $W^{1,1}(I)$ está imerso compactamente em $L^q(I)$, com $1 \le q < \infty$. Isto significa que toda sequência limitada $(u_n) \subset W^{1,1}(I)$ possui subsequência convergente em $L^q(I)$.

Proposição 2. *Se I é um intervalo ilimitado e $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \le p \le \infty$, então $\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$.*

Proposição 3. *Se $u,\ v \in W^{1,p}(I)$, com $1 \le p \le \infty$, então $u \cdot v \in W^{1,p}(I)$ e além disso,*

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Consequentemente, é válida a fórmula de integração por partes

$$\int_a^b (u' \cdot v)(x)\ dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b (u \cdot v')(x)\ dx,$$

para quaisquer $a,\ b \in \overline{I}$.

Proposição 4. *Sejam $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ e $u \in W^{1,p}(I)$, com $1 \le p \le \infty$. Então $(G \circ u) \in W^{1,p}(I)$ e além disso,*

$$(G \circ u)'(x) = G'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Definição 8. *Dado $1 \le p < \infty$, denotaremos por $W^{1,p}_0(I)$ o fecho de $C^1_c(I)$ em $W^{1,p}(I)$. Denotaremos também*

$$H^1_0 = W^{1,2}_0(I).$$

Podemos ainda introduzir ao espaço $W^{1,p}_0(I)$ a norma de $W^{1,p}(I)$ e de maneira análoga, introduzimos ao espaço $H^1_0(I)$ o produto por escalar de $H^1(I)$. Observe que o espaço $W^{1,p}_0(I)$ é um espaço de Banach separável. Mais ainda, é reflexivo se $1 < p \le \infty$. O espaço de Hilbert H^1_0 é separável.

Observação 1. *Quando $I = \mathbb{R}$ sabemos que $C^1_c(\mathbb{R})$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R})$ e portanto*

$$W^{1,p}_0(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

Mais ainda, utilizando uma sequência regularizante (ρ_n) é fácil verificar que

(i) $C^\infty_c(I)$ é denso em $W^{1,p}_0(I)$;

(ii) Se $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$, então $u \in W^{1,p}_0(I)$.

O próximo resultado caracteriza as funções em $W^{1,p}_0(I)$.

Teorema 20. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então $u \in W^{1,p}_0(I)$ se, e somente se, $u = 0$ em ∂I.*

7. Aplicação

Considerando o problema $\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$, em $I = (0, 1)$. Uma solução fraca do problema acima é uma função $u \in W^{1,2}_0(I)$ satisfazendo

$$\int_I u'v'\ dx + \int_I uv\ dx = \int_I f \cdot v\ dx,\ \forall v \in W^{1,2}_0(I).$$

Motivação:

$$\begin{aligned}
-u'' + u = f \ &\Rightarrow\ -u'' \cdot v + u \cdot v = f \cdot v \\
&\Rightarrow\ -\textstyle\int_I u'' \cdot v\ dx + \int_I u \cdot v\ dx = \int_I f \cdot v\ dx \\
&\Rightarrow\ \textstyle\int_I u' \cdot v'(x)\ dx - u' \cdot v'|_{\partial I} + \int_I u \cdot v\ dx = \int_I f \cdot v\ dx \\
&\Rightarrow\ \textstyle\int_I (u' \cdot v')(x)\ dx + \int_I (u \cdot v)(x)\ dx = \int_I f \cdot v\ dx.
\end{aligned}$$

O espaço $H^1_0(I) \equiv W^{1,2}_0(I)$ é munido do produto interno

$$(u, v)_{H^1(I)} = \int_I u' \cdot v'\ dx + \int_I u \cdot v\ dx.$$

A aplicação $\varphi : H^1_0(I) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(v) = \int_I (f \cdot v)\ dx$$

é um funcional linear contínuo se $f \in L^2(I)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
|\varphi(v)| &= |\textstyle\int_I f \cdot v dx| \le \int_I |f| \cdot |v|\ dx \\
&= \|f \cdot v\|_{L^1(I)} \le \|f\|_{L^2(I)} \cdot \|v\|_{L^2(I)} \le C.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $u \in H^1_0(I)$ tal que

$$\varphi(v) = \int_I f \cdot v\ dx = (u, v)_{H^1},$$

$$\int_I u \cdot v\ dx + \int_I u' \cdot v'\ dx = \int_I f \cdot v\ dx.$$

Se $f \in L^2(I)$ e $u \in H^1_0(I)$ é solução fraca do problema, então $u \in H^2(I) = W^{2,2}(I)$. Como u é solução fraca do problema inicial, temos

$$\int_I u' \cdot v'\ dx + \int_I u \cdot v\ dx = \int_I f \cdot v\ dx,\ \forall v \in H^1_0(I)$$

e

$$\int_I u' \cdot v'\ dx = \int_I (f - u) \cdot v\ dx,\ \forall v \in H^1_0(I).$$

Em particular, $\int_I (u' \cdot v')(x)\ dx = \int_I (f - u) \cdot v\ dx,\ \forall v \in C^1_c(I)$. Isto nos garante que $(u - f)$ é a derivada fraca de u'. Como $(f - u) \in L^2(I)$, segue que $u'' = u - f \in L^2(I)$.

Portanto, $u \in H^2(I) = W^{2,2}(I)$. Considere agora $f \in C^1(\overline{I})$. Note que $u \in H^1(I) = W^{1,2}(I)$. Pelo Teorema de Imersão, temos $u \in W^{1,2}(I) \subset C(\overline{I})$.

Logo, $(u')' = u - f \in C(\overline{I})$. Portanto, $u \in C^2(\overline{I})$.

8. Bibliografia

[1] Bartle, R. G. *The elements of integration* John Wiley & Sons, 1966.
[2] Bartle, R. G. *The elements of integration* John Wiley & Sons, New York, 1995.
[3] Brezis, H. *Análisis funcional: teoría y aplicaciones.* Alianza, 1983.
[4] Carvalho, V. J. A. *Uma Introdução aos Espaços de Sobolev e Aplicações à Equações Diferenciais.* Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.
[5] Kreyszig, E. *Introductory Funcional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons, 1978.
[6] Royden, H. L. *Real Analysis.* Macmillan Publishing Company, New York, 1988.

9. Apoio Financeiro

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico