Universidade Federal de Viçosa

Ciências Exatas e Tecnológicas

Departamento de Matemática

Carlos Gabriel Freitas Dias
carlos.gabriel@ufv.br
Estudante de Graduação

Enoch Humberto Apaza Calla
enoch@ufv.br
Orientador

O atrator de Lorenz geométrico

Introdução: *Como parte da teoria de sistemas não-uniformimente hiperbólicos vamos estudar o atrator de Lorenz geométrico. Existem estudos onde mostram que o atrator de Lorenz geométrico possuem órbitas periódicas densas. Concluíremos que o atrator de Lorenz geométrico é uma classe homoclínica i.e, o fecho dos pontos de interseção transversal das variedades estáveis e instáveis de uma órbita periódica.[1]*

1. Definindo o atrator de Lorenz geométrico

Considere $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup [\infty]$ a 3-esfera. O atrator de Lorenz geométrico é um atrator em S^3 de um fluxo Y. Este atrator tem como bloco isolante um bitoro sólido U em $\mathbb{R}^3$ ao qual o fluxo Y é transversal e aponta para seu interior ao longo de sua fronteira. Em S^3/U o fluxo Y tem três singularidades hiperbólicas tipo sela em $\mathbb{R}^3$ com autovalores complexos estáveis, e uma fonte $\{\infty\}$. Definimos o conjunto maximal inveriante de Y em U como:

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} Y_t(U)$$

O conjunto Λ é chamado o atrator de Lorenz geométrico. O modelo geométrico da figura abaixo é motivado pelo campo de Lorenz[3]:

$$X(x,y,z) = (-\sigma x + \sigma y, rx - y - xz, -bz + xy); \sigma, r, b > 0 \qquad (1)$$

Quando os parâmetros na equação anterior são $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = \frac{8}{3}$, a simulação numérica deste campo possui um comportamento similar ao campo Y chamado modelo de Lorenz geométrico.[2]

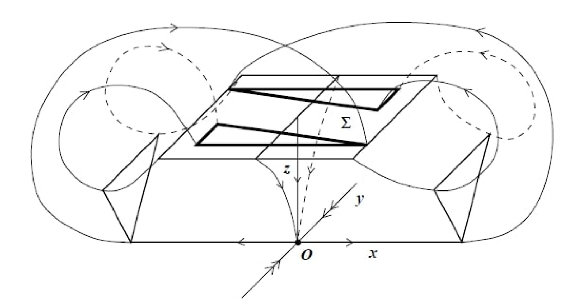

Figure 1: O atrator de Lorenz geométrico

2. A transformação de retorno.

Seja $\Sigma = \{(x,y,1) : |x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2}\}$ uma seção transversal do campo Y tal que temos uma transformação de retorno F bem definida para $\Sigma^* = \Sigma/\{x=0\}$. A linha $x = 0$ em Σ é a interseção de $W^s(0,Y)$ com Σ . Seja

$$F : \Sigma^* \to int(\Sigma) : p \to F(p)$$

definida por $F(p) = Y_\tau(p)$, onde τ é o primeiro tempo positivo tal que $Y_\tau \in \Sigma$. Portanto, assumimos as seguintes hipóteses sobre o campo Y.

1. *O ponto $O = (0,0,0)$ tem autovalores λ_1, λ_2, λ_3 tais que $0 < -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2$, onde λ_3 é o autovalor do eixo z, o qual é suposto invariante pelo fluxo gerado por Y.*
2. *Existe uma folheação Γ^s de Σ cujas folhas são linhas verticais tais que se $L \in \Gamma^s$ e F está definida em L, então F(L) fica contida numa folha de Γ^s. A folheação Γ^s é parte da variedade estável forte do fluxo no atrator a qual pode ser estendida a uma vizinhaça do atrator.*
3. *Todo ponto de Σ^* retorna a Σ e a transformação de retorno F é "suficiente"expansora na direção transversa às folhas de Γ^s.*
4. *O fluxo é simétrico em relação à rotação $\theta = \pi$ em torno do eixo z.*

Estas quatro hipóteses definem o fluxo de Lorenz geométrico. Analíticamente as hipóteses acima podem ser reformuladas mediante um sistema de coordenadas (x,y) sobre Σ tal que F possui as seguintes propriedades:

Propriedade 1 *As folhas de Γ^s estão dadas por $x = c$ com $\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$*

Propriedade 2 *Existem transformações f e g tais que F tem a forma*

$$F(x,y) = (f(x), g(x,y))$$

para $x \neq 0$ e F(-x,-y) = -F(x,y).

Propriedade 3 *$f'(x) \geq \lambda > \sqrt{2}$, para todo $x \neq 0$ e $\lim_{x \to 0} f'(x) = \infty$.*

Propriedade 4 *$0 < \frac{\partial g}{\partial y} < \delta < 1$ para todo $x \neq 0$ e $\lim_{x \to 0} \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$.*

Observe que:

1. *Exceto do fato de F não está definida sobre $x =$ 0, as Propriedades 3 e 4 sobre F implicam que existem uma estutura hiperbólica nas órbitas de F em Σ.*
2. *Perto da origem O = (0,0,0) existe uma expansão transversa à folheação Γ^s.*
3. *Podemos pensar que cada folha $L \in \Gamma^s$ está contida na interseção de Σ com $W^s(q,Y)$ para algum $q \in L$ e $L \subset W^{ss}(q,Y)$.*

3. O espaço das folhas da folheação Γ^s

Seja $B = [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ o espaço das folhas da folheação Γ^s, isto é, B é o quociente de Σ for Γ^s com $\pi : \Sigma \longrightarrow B : (x,y) \longrightarrow x$ sendo a transformação projeção. Considerando a Propriedade 2 , seja $f : B/\{0\} \longrightarrow B$ a transformação quociente induzida por F, onde $f \circ \pi = \pi \circ F$. Observe na Figura 2. Note que $f(B/\{0\}) = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$.
Se $V \subset \Sigma$ e $J \subset B$, assumimos as seguintes convenções: $F(V) := F(V/\{x = 0\}$, $f(J) := f(J/\{0\})$ e $B^0 = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$. Portanto, podemos escrever $f : B \longrightarrow B$, $f : B^0 \longrightarrow B^0$ e $f : \Sigma \longrightarrow \Sigma$.

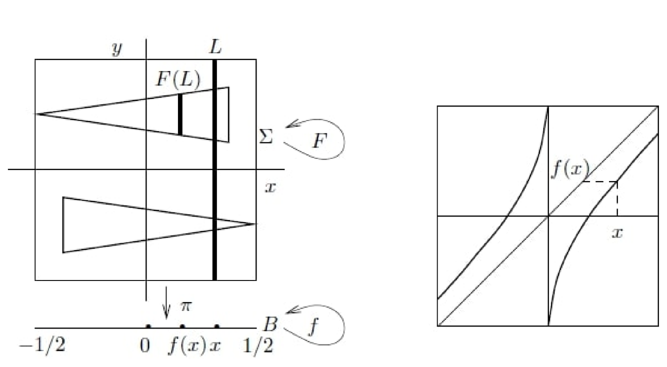

Figure 2: Transformação do modelo de Lorenz geométrico

Definimos

$$A = CL\left(\bigcap_{n \geq 0} F^n(\Sigma)\right)$$

.

Aqui $Cl(S)$ denota o fecho de S. Claramente, a órbita de cada ponto de Σ ou está contida em A ou toca na filha $x = 0$, onde F não está definida.[1]

4. Lemas prévios

Considere os seguintes resultados:

Lema 1 *A transformação $f : B^0 \longrightarrow B^0$ é LEO (locally eventually onto), isto é, para todo intervalo I de B^0 existe um número inteiro $n \geq 0$ tal que $f^n(I) = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$.*

Lema 2 *Seja $f : B^0 \longrightarrow B^0$ como acima. Então para todo $x \in B^0$, tem-se o seguiinte $B = CL\left(\cup_{k \geq 0} f^{-k}(\{x\})\right)$*

Observe que o Lema 2 implica que para cada folha $L_x = \pi^{-1}(x)$ com $x \neq \pm\frac{1}{2}$ temos $\Sigma = CL\left(\cup_{k \geq 0} F^{-k}(L_x)\right)$

Lema 3 *A transformação $f : B \longrightarrow B$ tem órbitas periódicas densas.*

Observe que se b é um ponto periódico de f então a folha $L_b = \pi^{-1}(b)$ é uma folha periódica para F. Deste modo, o Lema 3 junto ao fato de que as folhas de Γ^s são contraidas por F, Propriedade 4, implica que F também tem órbitas periódicas densas.

Lema 4 *Para todo ponto periódico p de F, tem-se*

$$\Sigma = CL(W^s(p.F)).$$

Lema 5 *Para todo ponto periódico p de F, tem-se*

$$\Sigma/(L_{\frac{-1}{2}} \cup L_{\frac{1}{2}}) = \bigcup_{(x',y') \in W^u(p,F)} L_{x'}.$$

Lema 6 *Para todo ponto periódico p da transformação F, têm-se*

$$CL(W^u(p,F)) = A$$

5. O atrator de Lorenz geométrico é uma classe homoclínica

Teorema 1 *O subconjunto compacto invariante A de F é uma classe homoclínica para F.*

Teorema 2 *O atrator de Lorenz geométrico é uma classe homoclínica.*

Demonstração: Pelo fato de f ser LEO f^n tem um ponto fixo em B e com isso f possui um ponto periódico. De tal modo, F tem um ponto periódico, e com isso o fluxo Y_t possui órbita periódica. Seja $q \in Y_t(A)$ arbitrário e $r \in H_F(p)$ analisando o plano transverso da variedade instável e estável e dado que

$$\Lambda = CL\left(\bigcup_{t \geq 0} Y_t(A)\right)$$

pela arbitrariedade de q podemos toma-lo ão próximo de r quanto queira e pelo Teorema 2, temos que Λ é uma classe homoclínica para o fluxo Y. ∎

6. Referências

Referências

[1] **S. Bautista** *"The geometric Lorenz attractor is a homoclinic class.", Boletín de Matemáticas Nueva Serie, Volumen XI No. 1 (2004), pp. 69–78.*

[2] **C. Robinson** *"Dinamical Systens, stability, symbolic dynamics, and chaos", CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.ISBN: 0-8493-8493-1.*

[3] **E. Lorenz** *e* **Edward Norton** *"The Essence of Chaos ", USA: University of Washington Press, 1995.*