UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Área Temática: Ciências Exatas e da Terra / Modalidade: Pesquisa

PIBIC

Sistemas Dinâmicos com auxílio do Maxima

Bolsista: Alyson Cônsuli da Silva - Graduando do curso de Matemática - UFV - alyson.silva@ufv.br
Orientador: Alexandre Miranda Alves - Professor do Departamento de Matemática - UFV - amalves@ufv.br

Introdução

Sistemas Dinâmicos, é uma área da Matemática, onde se discute o comportamento de transformações em uma variável (real ou complexa), comportamento das órbitas de pontos críticos, conjuntos atratores e repulsores, dentre outras. A partir desse estudo, pode-se compreender o comportamento de funções, até mesmo caóticas, as quais possuem grande aplicabilidade, como por exemplo em ecologia e meteorologia.

Objetivos

Compreender e descrever propriedades dinâmicas de sistemas diferenciais.

Entender e prever o comportamento, a longo prazo, dos estados de um sistema, para o qual existe uma regra determinística de como o sistema evolui.

Utilizar o software Maxima, como uma ferramenta para auxiliar na implementação gráfica, algoritmos e resolução de equações.

Metodologia

A metodologia adotada para alcançar os objetivos propostos será a metodologia própria da pesquisa matemática, que consiste na revisão bibliográfica de artigos relacionados aos problemas propostos no projeto e no desenvolvimento de pesquisa sobre os temas propostos, realizando um estudo comparativo com os trabalhos desenvolvidos por outros autores. Além disso, será utilizado o software Maxima, como ferramenta de auxílio na compreensão de conceitos e também na implementação de cálculos e gráficos.

Resultados

Para a compreensão do comportamento de sistemas dinâmicos, foi necessário o uso de certas definições. Tais como:

Órbitas: Dado $f : X \to X$ e $x \in X$, a órbita de x é o conjunto $O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\} = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\}$;

Pontos fixos e periódicos: Um ponto $x \in X$ é um ponto fixo de $f : X \to X$ se $f(x) = x$. Se $x \in X$ é um ponto fixo de f^n (isto é, se $f^n(x) = x$) para algum $n \in \mathbb{N}$, então dizemos que x é um ponto periódico. Ao menor valor natural de n satisfazendo essa propriedade chamamos período do ponto x;

Com a utilização do software Maxima, foi possível uma análise gráfica, onde obtemos órbitas, pontos fixos e periódicos de funções, o que é de extrema importância para compreendermos o comportamento de sistemas dinâmicos discretos, mesmo não conhecendo seu resultado quantitativo.

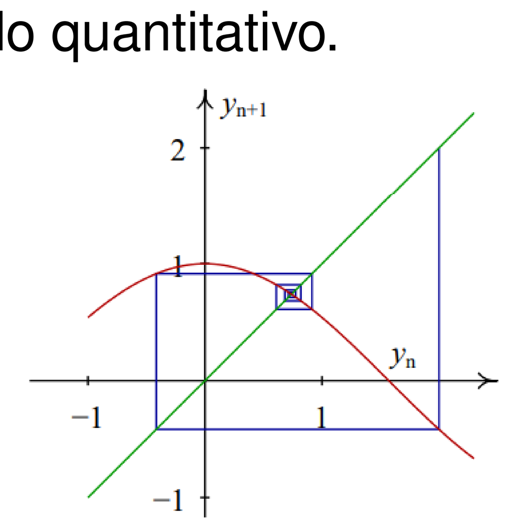
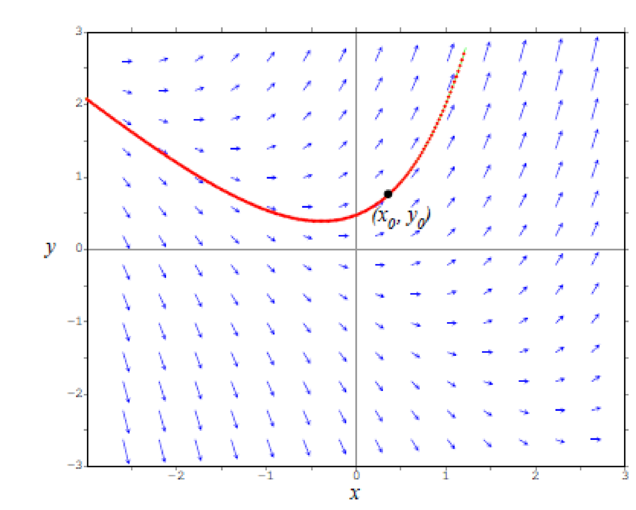


Diagrama de degraus para $x_{n+1} = cos(x_n)$ com $x_0 = 2$.

É possui também a utilização do Maxima, para análise de Sistemas Dinâmicos Contínuos, $y' = f(x, y)$. Para isso, iremos analisar o campo de direções, que é um desenho onde em cada ponto aparece um vetor com declive igual a $f(x, y)$. As soluções da equação diferencial serão curvas tangentes a esses vetores em todos os pontos..



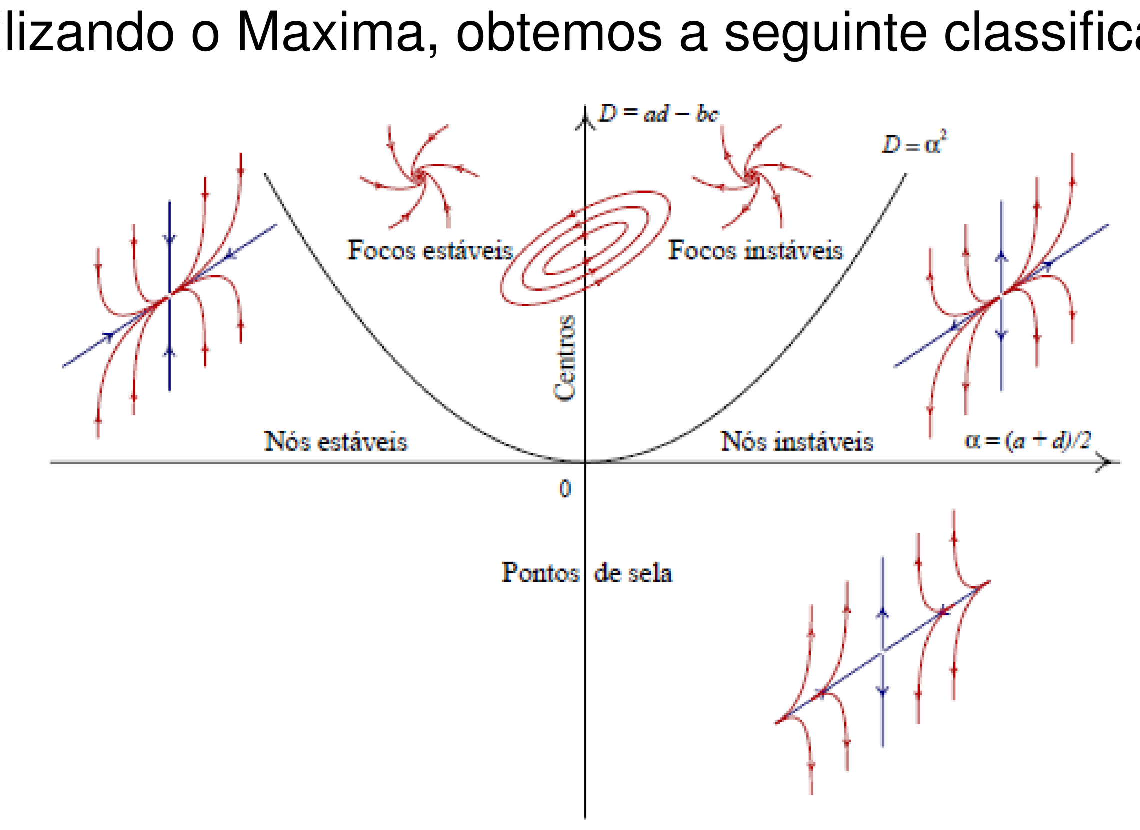
Campo de direções da equação $y' = y + x$ e a solução que passa por $(x0, y0)$.

É possível utilizar o maxima para uma análise de sistemas lineares de segunda ordem, que é um sistema com duas variáveis de estado, x e y, com derivadas que são combinações lineares dessas duas variáveis:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

onde a, b, c, d são constantes.

Assim, iremos fazer uma classificação para esses sistemas, analisando apenas o traço e o determinante da matriz do sistema, logo, utilizando o Maxima, obtemos a seguinte classificação:



Classificação dos sistemas lineares de segunda ordem

Conclusão

A impossibilidade de predizer valores exatos, mesmo que o sistema seja de equações deterministas, é uma característica dos sistemas caóticos. Entretanto isso não significa dizer que na Teoria do Caos não se pode fazer previsões. É possível que se façam previsões precisas, porém referindo-se às características qualitativas do comportamento do sistema, e não aos valores de suas variáveis num determinado instante. O software Maxima foi essencial para muitas análises, já que com ele, foi possível a visualização de gráficos e um modo rápido e eficiente de obtermos resoluções de equações. Pode-se dizer que essa área traz uma boa visão do intercâmbio existente entre a matemática pura e a aplicada.

Bibliografia

[1] Devaney, Robert L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Westview Press*, 2003.

[2] Robinson, Clark. Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. *CRC Presss LLC*, 1999.

[3] Villate, J. E.: *Introdução aos Sistemas Dinâmicos - Uma abordagem Prática com Maxima.* Edição do autor, ISBN: 972-99396-0-8, Porto, 2007.