Tópicos Avançados e Aplicações de Álgebra Linear

Universidade Federal de Viçosa — Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Matemática — Trabalho de Iniciação Científica
Tenilson Neves Silva — tenilson.silva@ufv.br
Orientadora: Marinês Guerreiro — marines@ufv.br
Apoio Financeiro: CNPq - PIBIC

1. Introdução

Álgebra Linear é um dos conhecimentos básicos e essenciais em qualquer ciência exata e que aparece praticamente em todas as áreas do saber que utilizam a Matemática como ferramenta para modelar os seus problemas e resolvê-los. O potencial de aplicabilidade da Álgebra Linear é muito amplo e, neste projeto, abordamos várias aplicações, além de aprofundar alguns tópicos avançados desta área.
Neste trabalho apresentamos alguns teoremas importantes estudados e duas aplicações da Álgebra Linear, a saber, aplicações em Modelos Econômicos de Leontief e em cadeias de Markov.

2. Tópicos Avançados de Álgebra Linear

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, $T : V \to V$ uma aplicação linear e $q(t) \in \mathbb{K}[t]$ um polinômio com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$.
Se $q(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i t^i$, então $q(T) = \sum_{i=1}^{k} a_i T^i$, mesmo que V tenha dimensão infinita. Se $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz, $q(A) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Teorema 1 (Teorema da Imagem do Espectro). *Sejam $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $q(t) \in \mathbb{K}[t]$. Se λ é um autovalor de A, então $q(\lambda)$ é um autovalor de $q(A)$. Além disso, quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, todos os autovalores de $q(A)$ são da forma $q(\lambda)$, em que λ é um autovalor de A.*

Definição 1. *Seja $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ o polinômio característico de $T : V \to V$, em que V é um espaço vetorial de dimensão finita n. Seja*

$$p(t) = [p_1(t)]^{s_1} \cdots [p_j(t)]^{s_j}$$

a decomposição de $p(t)$ em fatores irredutíveis, com $p_i(t) \neq p_k(t)$, para $i \neq k$. Definimos, para $i = 1, \ldots, j$, o **autoespaço generalizado** *associado ao polinômio $p_i(t)$ como o conjunto de todos os vetores $v \in V$ para os quais existe um inteiro positivo k tal que $[p_i(t)]^k v = 0$.*
No caso em que $p_i(t) = t - \lambda_i$, sendo λ_i um autovalor de T, os elementos não-nulos do autoespaço generalizado são chamados **autovetores generalizados** *de T associados ao autovalor λ_i.*

Como $N_k(p_i(t))$ é um subespaço do espaço de dimensão finita V, para todo $k \in \mathbb{N}$, esses subespaços precisam ser todos iguais a partir de certo índice $k \in \mathbb{N}$. Seja $d_i = d(p_i(t))$ o menor inteiro positivo com tal propriedade. O inteiro positivo d_i é chamado **índice** de $p_i(T)$.

Teorema 2 (Decomposição Primária)**.** *Seja $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ o polinômio característico da aplicação linear $T : V \to V$, em que V é um espaço vetorial de dimensão finita n. Se*

$$p(t) = [p_1(t)]^{s_1} \cdots [p_j(t)]^{s_j}$$

é a decomposição de $p(t)$ em fatores irredutíveis, com $p_i(t) \neq p_k(t)$, para $i \neq k$, então, se d_i é o índice de $p_i(T)$, o polinômio mínimo de T é

$$m(t) = [p_1(t)]^{d_1} \cdots [p_j(t)]^{d_j},$$

em que $0 < d_i \leqslant s_i$, para $i = 1, \ldots, j$. Em outras palavras, o polinômio mínimo possui todos os fatores irredutíveis do polinômio característico de T. Além disso,

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_j,$$

em que $W_i = ker\,[p_i(t)]^{d_i}$, com $T(W_i) \subset W_i$.

Observação 1. *No caso especial em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, o Teorema da Decomposição Primária é conhecido como* **Teorema Espectral**.

Definição 2. *Uma matriz complexa J, de ordem $n \times n$, está na* **forma canônica de Jordan** *se*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix}, \text{ em que } J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

e λ é um dos autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ da matriz J.(Ao autovalor λ_i pode estar associado mais do que um bloco J_i; às vezes se define J_i com a sub-diagonal de uns situando-se abaixo da diagonal principal).

Teorema 3 (Jordan). *Sejam $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ duas matrizes semelhantes, isto é, existe uma matriz invertível $P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $A = P^{-1}BP$. Então*
(i) A e B possuem os mesmos autovalores λ_i;
(ii) os espaços $N_j(\lambda_i) = ker(A-\lambda_i I)^j$ e $M_j(\lambda_i) = ker(B-\lambda_i I)^j$ possuem a mesma dimensão, para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo autovalor λ_i.
Reciprocamente, se estas duas condições se verificam, então A e B são semelhantes.

Definição 3. *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Um* ***produto interno*** *em V é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*
(i) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, para todos $u, v \in V$;
(ii) $\langle u + \lambda v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \lambda\langle u, v\rangle$, para todos $u, v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$;
(iii) $\langle u, v\rangle \geqslant 0$ e $\langle v, v\rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$.
Um espaço V com produto interno é chamado **euclidiano** *se ele tem dimensão finita.*

Teorema 4 (de representação de Riesz)**.** *Toda aplicação linear $l : V \to \mathbb{K}$ num espaço euclidiano V pode ser escrita como um produto interno. Mais precisamente, existe um único $y \in V$ tal que*

$$l(x) = \langle x, y\rangle, \qquad \text{para todo } x \in V.$$

Existe uma generalização deste resultado para certos espaços com produto interno de dimensão infinita (os espaços de Hilbert).

Proposição 1. *Sejam V e W espaços euclidianos. Dada uma aplicação linear $T : V \to W$, existe uma única aplicação linear $T^* : W \to V$, chamada* **adjunta** *de T, satisfazendo*

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle, \text{ para todos } v \in V,\ w \in W.$$

Definição 4. *Uma aplicação $T : V \to V$ é chamada* **auto-adjunta** *se $T^* = T$.*

Note que se B é uma base ortonormal de V, $[T^*]_B = ([T]_B)^*$. Além disso, se $T_B = A$ é auto-adjunta, $P^{-1}AP = B$ implica que B é auto-adjunta. Uma matriz A é **auto-adjunta** se $A^* = A$. No caso real, isso equivale a $A^T = A$ e a matriz A é **simétrica**.

Teorema 5. *Seja V um espaço euclidiano complexo e $H : V \to V$ uma aplicação auto-adjunta. Então os autovetores de H estão associados a autovalores reais e formam uma base ortonormal de V.*

Teorema 6. *Sejam $H, K : V \to V$ aplicações auto-adjuntas tais que*

$$HK = KH.$$

Então H e K podem ser simultaneamente diagonalizadas, isto é, existe uma base ortogonal de V formada por vetores que são, ao mesmo tempo, autovetores de K e de H.

Definição 5. *Seja V um espaço euclidiano. Uma aplicação linear $N : V \to V$ é* ***normal*** *se ela comuta com sua adjunta, isto é,*

$$NN^* = N^*N.$$

3. Modelos Econômicos de Leontief

. O Modelo Fechado de Leontief
É um sistema econômico consistindo de um número finito de indústrias, ordenadas pelos números $1, 2, 3, \ldots, k$, tais que, ao longo de algum período fixo de tempo, cada indústria produz um produto, que pode ser algum bem ou serviço, que é completamente utilizado de uma maneira predeterminada pelas k indústrias.
O problema depende em encontrar preços convenientes que devem ser cobrados por estes k produtos de tal maneira que, para cada indútria, o total dos gastos seja igual ao total recebido. Uma tal estrutura de preços representa uma posição de equilíbrio para a economia.

Para o período fixado de tempo, p_i é preço cobrado pela i-ésima indústria pela sua produção total; e_{ij} é fração da produção total da j-ésima indústria que é comprada pela i-ésima indústria, para $i, j = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Com estas quantidades, formamos o **vetor-preço** $P = [p_1, p_2, \ldots, p_n]^t$ e a **matriz de input-output** $E = [e_{ij}]$ $k \times k$.
As entradas de P e E são não negativas com $e_{1j} + e_{2j} + \ldots + e_{kj} = 1$, para $j = 1, 2 \ldots, k$.

Teorema 7. *Se E é uma matriz de troca, então $EP = P$ sempre tem uma solução não trivial P cujos entradas são não-negativas.*

Teorema 8. *Seja E uma matriz de troca tal que todas as entradas de E^m sejam positivas, para algum inteiro positivo m. Então existe exatamente uma solução linearmente independente de $(I - E)P = 0$ e ela pode ser escolhida com todas suas entradas positivas.*

. O Modelo Aberto de Leontief

Ao contrário do modelo fechado, no qual os produtos de k indústrias são somente distribuídos entre as próprias indústrias, o modelo aberto tenta satisfazer uma demanda externa para os produtos. Uma porção desta produção ainda pode ser distribuída entre as próprias indústrias, para mantê-las operacionais, mas deve haver algum excesso, alguma produção líquida. com a qual satisfazer à demanda externa. Nesse modelo, os preços são fixados e o objetivo é determinar os níveis de produção das indústrias necessários para satisfazer a demanda externa.

Para algum período fixado de tempo, sejam x_i o valor monetário da produção total da i-ésima indústria, d_i o valor monetário da produção da i-ésima indústria necessária para satisfazer a demanda externa, c_{ij} o valor monetário da produção da i-ésima indústria que é necessária para a j-ésima indústria produzir uma unidade do valor monetário de seu próprio produto.

Com estas quantidades, definimos o **vetor-produção**

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_k]^t,$$

o **vetor-demanda**

$$D = [d_1, d_2, \ldots, d_k]^t$$

e a **matriz de consumo** $C = [c_{ij}]_{k\times k}$.

Pela sua própria natureza, X, D e C possuem entradas não-negativas A partir da definição de c_{ij} e de x_j pode ser visto que a quantidade

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{ik}x_k$$

é o valor da produção da i-ésima indústria que é necessária para todas as k indústrias produzirem um total especificado pelo vetor de produção X.

Definição 6. *Uma matriz de consumo C é* ***produtiva*** *se $(I - C)^{-1}$ existe e as entradas da matriz $(I - C)^{-1}$ são não-negativas.*

Teorema 9 (Matriz de Consumo Produtiva)**.** *Uma matriz de consumo C é produtiva se, e somente se, existe um vetor-produção X tal que $X > CX$.*

A condição $X > CX$ significa que existe uma tabela de produção tal que cada indústria produz mais do que consome.

Corolário 1. *Uma matriz de consumo C é produtiva se cada soma das entradas das linhas de C é menor do que 1.*

Corolário 2. *Uma matriz de consumo C é produtiva se cada soma da entradas das colunas de C é menor do que 1.*

O Corolário 5.2 nos diz que uma matriz de consumo é produtiva se todas as k indústrias do sistema econômico são lucrativas.

4. Cadeias de Markov

Um processo de transição que ocorrer com uma certa probabilidade e depender apenas do estado em que o fenômeno se encontra e do estado seguir é denominado **processo de Markov** e uma sequência de estados seguindo este processo será denominado **cadeia de Markov**.

Definição 7. *Um* ***processo aleatário de Markov*** *é um processo que pode assumir estados $a_1, a_2, \ldots, a_k$, de tal modo que a probabilidade de transição de um estado a_i para um estado a_j seja p_{ij} (um número que só depende de a_j e a_i).*

Se $P = [p_{ij}]_{k\times k}$ for a matriz de transição de uma cadeia de Markov qualquer de k estados, então, dado qualquer j, devemos ter

$$p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{kj} = 1, \tag{1}$$

porque se o sistema estiver no estado j numa observação, é certo que estará num dos k estados possíveis na próxima observação.
Uma matriz com a propriedade (1) é denominada **matriz de Markov**

Definição 8. *O* **vetor estado** *(ou* **vetor de probabilidades***) é aquele cuja i-ésima linha dá a probabilidade de ocorrência do estado a_i após n transações:*

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_k^{(n)} \end{bmatrix}$$

As entradas em qualquer vetor estado de uma cadeia de Markov são não-negativas e têm soma 1. Um vetor coluna com essa propriedade é denominado **vetor de probabilidade**. Seja $\mathbf{x}^{(0)}$ o vetor estado de uma cadeia de Markov em alguma observação inicial.

Teorema 10. *Se P for a matriz de transição de uma cadeia de Markov e $\mathbf{x}^{(n)}$ o vetor estado no n-ésima observação, então $\mathbf{x}^{(n+1)} = P\mathbf{x}^{(n)}$.*

Definição 9. *Uma matriz de transiçao é* ***regular*** *se uma potência positiva da matriz tem todas as entradas positivas.*

Assim, se P for uma matriz de transição regular, existe algum inteiro positivo m tal que todas as entradas de P^m são positivas.

Uma cadeia de Markov que é governada por uma matriz de transição regular é denominada **cadeia de Markov regular**.

Teorema 11. *Se P for uma matriz de transição regular, então:*
i) As potências P^n se aproximam de uma matriz Q, no sentido de que cada elemento de P^n se aproxima do elemento corresponde em Q.
ii) Todas as colunas de Q são iguais, sendo dadas por um vetor-coluna

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$$

em que os $q_i > 0$ tais que $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$.
iii) Para qualquer vetor estado inicial

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_k^{(0)} \end{bmatrix}$$

o vetor de probabilidades $P^n\mathbf{x}^{(0)}$ se aproxima de $\mathbf{q}$ (dado no item anterior).
iv) o vetor $\mathbf{q}$ é o único vetor que satisfaz $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$ e denominado **vetor de estado estacionário**.

5. Conclusão

Além das duas aqui apresentadas, foram estudadas ao longo do desenvolvimento desse projeto aplicações à Geometria, ao Cálculo, às Ciências Biológicas, da Saúde, à Teoria de Códigos, à Critpografia, à Teoria de Jogos e à de Grafos, à Economia e outras aplicações. Tal estudo permitiu desenvolver e aprofundar o conhecimento em Tópicos de Álgebra Linear e suas aplicações, como também, abriu possibilidades para uma futura pós-graduação em Matemática Aplicada.

Referências

[1] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo, H. G. Wetzler, *Álgebra Linear.* 3ª Edição ampliada e revista. Editora Habra, São Paulo, 1986.

[2] H. P. Bueno, *Álgebra Linear, Um segundo curso.* Textos Universitários , Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[3] A. Howard, C. Rorres, *Álgebra Linear com aplicações.* 8ª Edição, Tradução Claus Ivo Doering, Bookman, Porto Alegre, 2001.

[4] G. Strang, *Álgebra Linear e suas aplicações.* Tradução da 4ª edição norte-americana. Cengage Learning, São Paulo, 2001.