Identidades polinomiais e PI-álgebras

Universidade Federal de Viçosa — Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Matemática — Trabalho de Iniciação Científica
Diovana de Oliveira Mussolin — diovana.mussolin@ufv,br
Orientadora: Marinês Guerreiro — marines@ufv.br
Apoio financeiro: CNPq - INCTMAT

1. Introdução

O desenvolvimento da Teoria de Identidades Polinomiais teve início por volta de 1930, mas foi a partir de 1948 que esta teoria desenvolveu-se mais intensamente após um artigo de Kaplansky, no qual o autor mostrou que toda PI-álgebra primitiva é uma álgebra simples de dimensão finita.
Uma **identidade polinomial** de uma álgebra A sobre um corpo F é um polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em indeterminadas não comutativas que se anula quando avaliado sob todos os elementos de A. Quando existe uma tal identidade para a álgebra A, dizemos que A é uma **PI-álgebra.**
O conjunto das identidades polinomiais satisfeitas por uma dada álgebra sobre um corpo F é um **T-ideal** da álgebra $F\langle X\rangle$ dos polinômios nas variáveis não comutativas, ou seja, é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$.
Os principais resultados desenvolvidos nos últimos anos sobre as PI-álgebras têm sido obtidos, em sua maior parte, através de técnicas que fazem o uso de representações de grupos simétricos em característica zero e teoria de álgebras graduadas, além de métodos assintóticos, integrando assim várias teorias matemáticas em uma área de pesquisa bastante atual.

2. Definições básicas de PI-álgebras

Definição 1. *Sejam F um corpo e X um conjunto. A* **álgebra associativa livre** *em X sobre F é a álgebra $F\langle X\rangle$ dos polinômios nas indeterminadas não comutativas $x \in X$. Formalmente $F\langle X\rangle$ é definida por um isomorfismo com a seguinte propriedade universal: dada uma F-álgebra associativa A, toda aplicação $X \to A$ pode ser estendida de forma única para um homomorfismo de álgebras $F\langle X\rangle \to A$. A cardinalidade de X é o* **posto** *de $F\langle X\rangle$. Aqui consideramos a álgebra livre $F\langle X\rangle$ de posto enumerável sobre o conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.*
Se $f \in F\langle X\rangle$ escrevemos $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, com $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ as indeterminadas que, de fato, aparecem em f. Para os elementos de X usamos os símbolos x, x_i .Também usamos y, y_i, z, z_i para novos elementos de X, quando for necessário.
Definição 2. *Seja A uma F-álgebra e $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma* **identidade polinomial de** A *se $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, para todos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.*
Seja Φ o conjunto de todos homomorfismos $\varphi : F\langle X\rangle \to A$. Então f é uma identidade polinomial de A se, e somente se, $f \in \bigcap_{\varphi\in\Phi} Ker\varphi$. Diremos que $f \equiv 0$ é uma **identidade** de A ou que A **satisfaz** $f \equiv 0$. Uma vez que o polinômio trivial é uma identidade para toda álgebra A, estabelemos o seguinte:
Definição 3. *Uma álgebra A que satisfaça uma identidade polinomial não trivial é dita uma* **PI-álgebra**.
Para $a, b \in A$, seja $[a, b] = ab - ba$ o **comutador de Lie** de a e b. Apresentamos abaixo alguns exemplos de PI-álgebras.
Exemplo 1. *Se A é uma álgebra comutativa, então A é uma PI-álgebra, uma vez que satisfaz a identidade $[x, y] \equiv 0$.*

3. T-ideais e Variedades de Álgebras

Dada uma álgebra A, podemos considerar o ideal

$$Id(A) = \{f \in F\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \quad \text{em} \quad A\}$$

de todas as identidades polinomiais de A. Além disso, se $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é qualquer polinômio em $Id(A)$ e $g_1, \ldots, g_n$ são polinômios arbitrários em $F\langle X\rangle$, é claro que $f(g_1, \cdots, g_n) \in Id(A)$. Como qualquer endomorfismo de $F\langle X\rangle$ é determinado pela aplicação $x_i \to g_i$, para $i = 1, 2, \ldots$, com $g_i \in F\langle X\rangle$, segue que $Id(A)$ é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$.
Definição 4. *Um ideal I de $F\langle X\rangle$ é um* **T-ideal** *se $\varphi(I) \subseteq I$, para todo endomorfismo $\varphi \in End\, F\langle X\rangle$.*
Assim, dada uma álgebra A, $Id(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Por outro lado é fácil verificar que todos T-ideais de $F\langle X\rangle$ são desse tipo.
Vimos que qualquer álgebra A determina um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Por outro lado, muitas álgebras podem corresponder ao mesmo T-ideal (como o ideal de suas identidades). Introduzimos assim a noção de variedade de álgebras.
Definição 5. *Dado um conjunto não vazio $S \subseteq F\langle X\rangle$ a classe de todas as álgebras A tais que $f \equiv 0$, em A, para todo $f \in S$, é chamada* **variedade** *$V = V(S)$ determinada por S.*

4. Polinômios Homogêneos e Multilineares

Quando o corpo base F é infinito, o estudo das identidades de uma dada álgebra pode se reduzir ao estudo dos polinômios homogêneos ou multilineares.
Seja $F_k = F\langle x_1, \cdots, x_k\rangle$ a álgebra livres de posto $K \geq 1$ sobre F. Uma tal álgebra pode ser naturalmente decomposta como

$$F_k = F_k^{(1)} \oplus F_k^{(2)} \oplus \cdots, \qquad (1)$$

com $F_k^{(n)}$ o subespaço gerado por todos os monômios de grau total n, para cada $n \geq 1$.
Como $F_k^{(i)} \cdot F_k^{(j)} \subseteq F_k^{(i+j)}$, para todo $i, j \geq 1$, dizemos que F_k é **graduada pelo grau** ou que F_k tem uma **estrutura de álgebra graduada**. Os $F_k^{(i)}$ são chamados **componentes homogêneos** de F_k. A decomposição (1) ainda pode ser refinada como segue. Para cada $n \geq 1$, escreva

$$F_k^{(n)} = \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} F_k^{(i_1,\cdots,i_k)},$$

com $F_k^{(i_1,\ldots,i_k)}$ o subespaço gerado por todos os monômios de grau i_1 em $x_1, \cdots, i_k$ em x_k . Além disso, $F_k^{(i_1,\ldots,i_k)} \cdot F_k^{(j_1,\ldots,j_k)} \subseteq F_k^{(i_1+j_1,\ldots,i_k+j_k)}$ e dizemos que F_k é **multigraduada.** É claro que tais decomposições se estendem da maneira óbvia para $F\langle X\rangle$.
Definição 6. *Dado $f \in F\langle X\rangle$,* **um monômio de f** *é um monômio não-nulo que é um somando de f.*
Definição 7. *Um polinômio f pertencente a $F_k^{(n)}$, para algum $n \geq 1$, será chamado* **homogêneo de grau n**. *Se f pertence a algum $F_k^{(i_1,\ldots,i_k)}$, f será dito* **completamente homogêneo de múltiplo grau** *$(i_1, \ldots, i_k)$. Também dizemos que f é* **homogêneo na variável x_i** *, se x_i aparece com o mesmo grau em todos os monômios de f.*
Se F é um corpo infinito, então todo T-ideal é homogêneo em relação à multigraduação acima, isto é, eles têm uma decomposição correspondente em polinômios multihomogêneos. Se $f \in F\langle X\rangle$ podemos sempre escrever:

$$f = \sum_{i_1\geq 0,\ldots,i_n\geq 0} f^{(i_1,\ldots,i_n)},$$

no qual $f^{(i_1,\ldots,i_n)}$ é a soma de todos os monômios em f, com x_1 aparecendo com grau $i_1, \cdots, x_n$ aparecendo com grau i_n . Os polinômios $f^{(i_1,\cdots,i_n)}$ que são não-nulos são chamados **componentes multihomogêneas de f**.
Teorema 1. *Seja F um corpo infinito. Se $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial para a álgebra A, então toda componente multihomogênea de f é também uma identidade polinomial para A.*
Observação 1. *O Teorema 1 ainda é válido se F for finito tal que $|F| > deg f$. Por outro lado, se K é um corpo com q elementos, K satisfaz a identidade $x^q - x \equiv 0$, mas as componentes homogêneas dessa identidade não se anulam em K.*
Observação 2. *Uma consequência importante do Teorema 1 é que sobre um corpo infinito, todo T-ideal é gerado pelos seus polinômios multihomogêneos. Dentre os polinômios multihomogêneos, um papel importante é desempenhado pelos multilineares.*
Definição 8. *Um polinômio f é* **linear na variável** *x_i, se x_i ocorre com grau 1 em cada monômio de f. Um polinômio que é linear em cada uma de suas variáveis é dito* **multilinear**.
Na linguagem acima, dizemos que um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é multilinear se ele é multihomogêneo de múltiplo grau $(1, 1, \ldots, 1)$.
Observação 3. *Como num polinômio multilinear $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cada variável aparece de fato em cada monômio com grau 1, é claro que tal polinômio é sempre da forma*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

com $\alpha_\sigma \in F$, $\sigma \in S_n$. Aqui S_n é o grupo simétrico em $\{1, \ldots, n\}$.
Observe que se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é um polinômio linear numa variável, digamos x_1, então

$$f\left(\sum \alpha_i y_i,\, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum \alpha_i f(y_i,\, x_2, \cdots, x_n),$$

para todos $\alpha_i \in F$, $y_i \in F\langle X\rangle$.
Proposição 1. *Seja A uma F-álgebra gerada por um conjunto B sobre F. Se um polinômio multilinear f se anula em B, então f é uma identidade polinomial de A.*

Processo de Multilinearização

Teorema 2. *Se uma álgebra A satisfaz uma identidade polinomial de grau k, então ela satisfaz uma identidade multilinear de grau menor ou igual a k.*
Teorema 3. *Se $car F = 0$, todo polinômio não nulo $f \in F\langle X\rangle$ é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.*
Corolário 1. *Se $car F = 0$, todo T-ideal é gerado, como um T-ideal, pelos polinômios multilineares que ele contém.*
Definição 9. *Um subespaço L de uma álgebra A é um* **ideal de Lie de A** *se $[L, A] \subseteq L$. Aqui $[L, A]$ denota o grupo aditivo gerado por todos os comutadores de Lie $[l, a] = la - al$, para $l \in L$, $a \in A$.*
Sejam $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ e A é uma F-álgebra. Defina

$$f(A) = span_F\{f(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}.$$

5. Identidades Estáveis e Elementos Genéricos

Seja C uma álgebra comutativa sobre F e considere a F-álgebra $A \otimes_F C$.
Definição 10. *Seja f uma identidade para uma F-álgebra A. Dizemos que f é uma* **identidade estável** *para A se, para qualquer F-álgebra comutativa C, f é ainda uma identidade para $A \otimes_F C$.*
Exemplo 2. *Se $|F| = k$, então $f(x) = x^k - x$ é uma identidade de F, vista como álgebra, mas não se anula sobre qualquer extensão de corpo própria de F.*
Lema 1. *Se F é um corpo infinito e A é uma F-álgebra, então toda identidade polinomial de A é estável.*
Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo infinito F. Construímos $B = A \otimes_F F[\xi_j^{(i)} | i \geq 1,\, 1 \leq j \leq m]$ a álgebra produto tensorial de A e $F[\xi_j^{(i)}]$.
Definição 11. *Os elementos*

$$\xi^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} u_j \otimes \xi_j^{(i)},$$

para $i = 1, 2, \cdots$, são ditos **elementos genéricos**. *A subálgebra $\tilde{A}$ de B gerada por $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots,$ sobre F é dita a* **álgebra dos elementos genéricos de** A

Teorema 4. *Se F é um corpo infinito, a álgebra $\tilde{A}$ é uma álgebra relativamente livre de posto enumerável da variedade $var(A)$, isto é, $\tilde{A} = \frac{F\langle X\rangle}{Id(A)}$, com X enumerável.*

6. Polinômios *standard* e de Capelli

Definição 12. *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t)$ um polinômio linear em cada variável $x_1, \ldots, x_n$. Dizemos que f é* **alternado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$** *se f se torna nulo quando substituímos x_i por x_j, para todo $1 \leq i < j \leq n$.*
Pela linearidade de f em $x_1, \ldots, x_n$, verifica-se facilmente que se f é alternado em $x_1, \ldots, x_n$, então, para $1 \leq i < j \leq n$,

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n, \ldots, y_1, \ldots, y_t) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n, \ldots, y_1, \ldots, y_t).$$

Além disso, escrevendo qualquer permutação de S_n como um produto de transposições, segue que se $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t)$ é alternado em $x_1, \ldots, x_n$, então

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_t) = (sgn\, \sigma) f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t).$$

Neste caso, f é alternado em todas as variáveis.
Proposição 2. *Sejam $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t)$ um polinômio alternado em $x_1, \ldots, x_n$ e A uma F-álgebra. Se $a_1, \ldots, a_n \in A$ são linearmente dependentes sobre F, então $f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_t) = 0$, para todos $b_1, \ldots, b_t \in A$.*
Definição 13. *O polinômio*

$$Cap_m(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_{m+1}) = \sum_{\sigma\in S_m} (sgn\sigma) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma(2)} \ldots y_m x_{\sigma(m)} y_{m+1}$$

é chamado o **m-ésimo polinômio de Capelli.**
O polinômio de Capelli Cap_m é multilinear e alternado em $x_1, \ldots, x_m$.
Definição 14. *Uma álgebra A satisfaz a identidade de Capelli de posto m (ou o m-ésimo polinômio de Capelli) se A satisfaz todos os polinômios obtidos de*

$$Cap_m(x_1, \ldots, x_m;\, y_1, \ldots, y_{m+1})$$

fazendo as variáveis y_i iguais a 1 de todos as possíveis maneiras.
Proposição 3. *Se $f \in F\langle X\rangle$ é um polinômio alternado em $x_1, \ldots, x_m$, então*

$$f = \sum_{w_1,\ldots,w_{m+1}} \alpha_{w_1,\ldots,w_{m+1}} Cap_m(x_1, \ldots, x_m;\, w_1, \ldots, w_{m+1})$$

é uma combinação linear dos polinômios de Capelli, com $w_1, \ldots, w_{m+1}$ e convenientes monômios em $F\langle X\rangle$.
Definição 15. *O polinômio*

$$St_m(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\sigma\in S_n} (sgn\sigma) x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}$$

é chamado o **polinômio standard de grau m**.
Convencionamos que o símbolo ˆ corresponde à omissão do item assinalado com ele. Logo $f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_m)$ é um polinômio em que a variável x_i não aparece.
Proposição 4. *(i) Se $f(x_1, \ldots, x_m)$ é um polinômio multilinear alternado de grau m, então $f = \alpha St_m(x_1, \ldots, x_m)$, para algum $\alpha \in F$.*
(ii) $St_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} x_i St_m(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{m+1})$. Logo se $St_m \equiv 0$ é uma identidade para uma álgebra A, $St_{m+1} \equiv 0$ é também uma identidade para A.
Teorema 5. *Seja A uma F-álgebra.*
(i) Se $dim_f A = \infty$, então A satisfaz a identidade de Capelli de posto $(n+1)$. Em particular $St_{n+1} \equiv 0$ em A.
(ii) Se A é algébrica de grau limitado n sobre F, então A satisfaz

$$Cap_{n+1}(y,\, xy,\, x^2y, \ldots, x^ny;\, z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_{n+2}) \equiv 0.$$

Portanto $St_{n+1}(y,\, xy,\, x^2y,\, \ldots,\, x^ny) \equiv 0$ em A.

7. Considerações Finais

A partir deste estudo inicial, na sequência do desenvolvimento do projeto aplicaremos as representações de grupos simétricos para determinar T-ideais de algumas álgebras importantes como a álgebra de Grassmann e a álgebra $UT(2)$ das matrizes triangulares superiores.

8. Bibliografia

[1]. A. Giambruno & M. Zaicev. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods* , Editorial Committee, 2005.
[2]. V. Drensky. *Free Algebras and PI-Algebras*, Springer-Verlag Singapore, 2000.
[3]. V. Drensky. & E. Formanek. *Polynomial Identity Rings*, Springer-Verlag Singapore, 2004.