O Teorema de Abel via Grupos de Monodromias

Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Departamento de Matemática

Ellen Peixoto de Oliveira (Orientanda PIVIC) — *ellen.peixoto@ufv.br*

Rogério Carvalho Picanço (Orientador) — *rogerio@ufv.br*

Palavras chaves: Superfície de Riemann, monodromias, Teorema de Abel

Geometria/Topologia

Pesquisa

Matemática

1. Introdução

A resolução de equações algébricas de primeiro e segundo graus em uma variável é tratada desde o ensino fundamental. Também existem resoluções para equações de terceiro e quarto graus. A busca por estas últimas constituiu num dos mais belos capítulos da história da matemática no século XVI, envolvendo nomes como Cardano, Tartaglia, Del Ferro, Vieté, Ferrari, entre outros.

- A equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui como solução $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- Para resolver equações de terceiro grau usamos o método Cardano - Tartaglia.
- Para resolver equações de quarto grau utilizamos o método de Ferrari.
- Para equações de grau maior ou igual a cinco não existe uma resolução envolvendo radicais, este resultado foi obtido por Abel em 1824.

2. Objetivos

Geralmente a prova do Teorema de Abel nos cursos de graduação é feita através da Teoria Clássica de Galois via extensões de corpos e grupos de Galois. Neste projeto será mostrado que o Teorema de Abel é, na verdade, de natureza topológica. O ambiente de trabalho são as Superfícies de Riemann e o papel desempenhado pelos grupos de Galois serão assumidos pelos grupos de monodromias.

3. Teoria de Grupos

Comutador: Seja G um grupo. O subgrupo gerado pelos comutadores $\langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\rangle$ é chamado *subgrupo comutador* de G; ele será denotado por G'.

Obs: G' mede "quanto" G falha em ser comutativo, ou seja, quanto menor o número de elementos de G' mais abeliano é G. Agora, se $G' = \{e\}$, então G é abeliano.

Série Subnormal: Seja G um grupo. Uma *série subnormal* de G é uma cadeia de subgrupos

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{e\}$$

onde G_{i+1} é um subgrupo normal de G_i, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Os *grupos quocientes* da *série subnormal* acima são os grupos G_i/G_{i+1}, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Proposição: Seja G um grupo. As seguintes condições são equivalentes:

(i) O grupo G possui uma série subnormal cujos grupos quocientes são abelianos.

(ii) Existe um inteiro n tal que $G^{(n)} = \{e\}$.

No caso de G ser finito, elas são também equivalentes a:

(iii) O grupo G possui uma série de composição cujos grupos quocientes são abelianos (e portanto, são cíclicos de ordem prima).

Grupo Solúvel: Dizemos que G é um grupo solúvel se satisfaz as condições equivalentes da proposição anterior.

Observe que todo grupo abeliano é solúvel, já o grupo S_5 é um exemplo de grupo não solúvel.

4. Superfície de Riemann

Exemplo 1: Seja a função complexa $\varphi(z) = \sqrt{z}$.

Se $z \neq 0$, então $z = re^{i\theta}$ com $r > 0$ e $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Se $z \in \mathbb{C}$, temos $\sqrt{z} = \begin{cases} 0, & \text{se } z = 0 \\ \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta_0}{2}+k\pi\right)}, & \text{se } z \neq 0, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Como $\varphi(z) = \sqrt{z}$ admite dois valores para o mesmo ponto no domínio temos que ela é uma função multivalor.

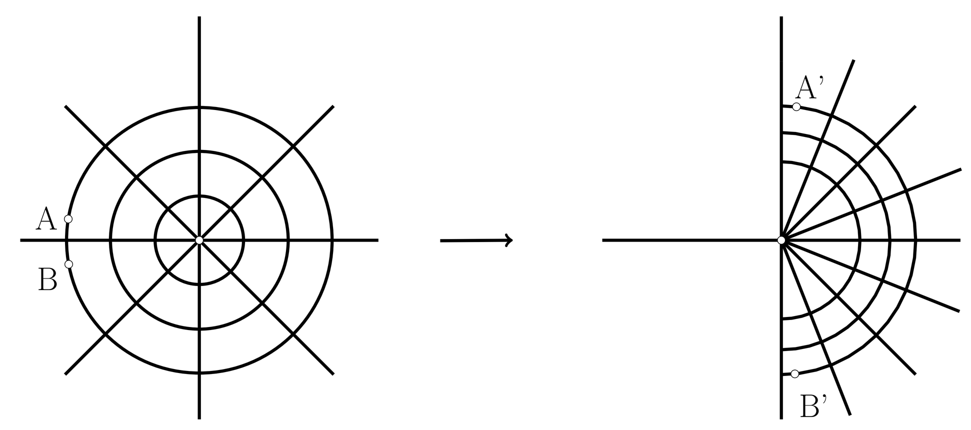
Considere as duas seguintes funções complexas univalor:

i) $f(z) = \sqrt{z} = \begin{cases} 0, & \text{se } z = 0 \\ e^{i\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}, & \text{se } z \neq 0 \end{cases}$, com $-\pi < \theta_1 \leq \pi$

ii) $g(z) = \sqrt{z} = \begin{cases} 0, & \text{se } z = 0 \\ e^{i\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}, & \text{se } z \neq 0 \end{cases}$, com $-3\pi < \theta_2 \leq -\pi$

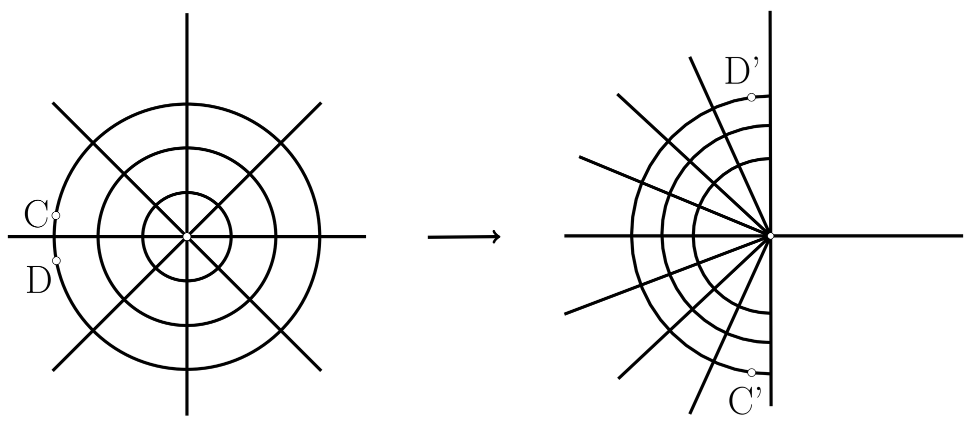
Vamos estudar o domínio e imagem de $f(z)$:

Domínio $f(z)$ — Imagem $f(z)$



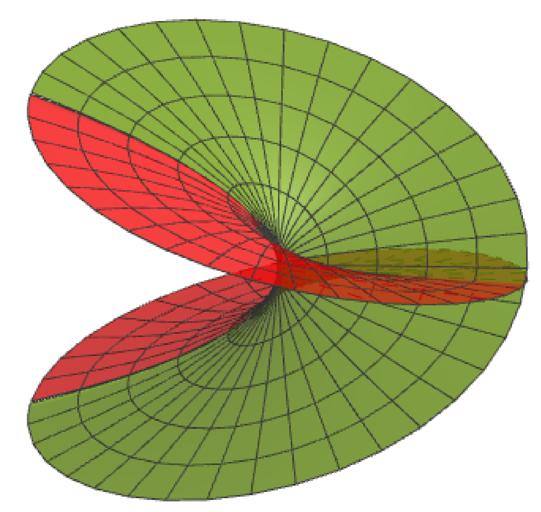
Estudando o domínio e a imagem de $g(z)$ temos:

Domínio $g(z)$ — Imagem $g(z)$



Podemos colar as duas funções preservando a continuidade na Superfície de Riemann.

A Superfície de Riemann da função $\sqrt{z}$ é dada por:



A superfície acima é composta por duas folhas (verde e vermelha) definidas pelos argumentos θ_1 e θ_2 das funções $f(z)$ e $g(z)$, respectivamente. Como estas superfícies são muito complicadas utilizamos um diagrama, Esquema de Riemann, para uma representação alternativa.

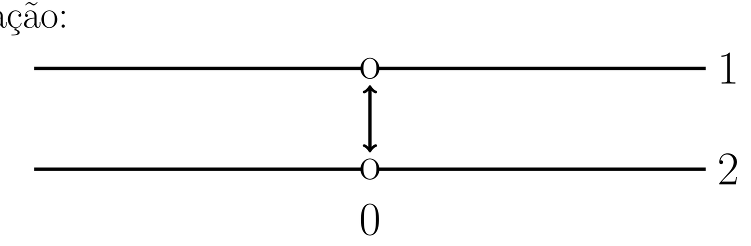
Construção de Esquemas de Riemann de Funções Radicais:

1. Encontrar os pontos de ramificação; geralmente igualamos o radicando a zero.

2. Representar as folhas por meio de segmentos de retas; a quantidade de folhas são determinadas pelo índice do radical.

3. Indicar a passagem das folhas através de uma seta.

Para a função $\sqrt{z}$ temos o seguinte esquema, com $z_0 = 0$ o único ponto de ramificação:



Exemplo 2: Seja a função complexa $\phi(z) = \sqrt[4]{z^2}$.

Para a função $\phi(z)$ defina as seguintes folhas:

folha 1: $-3\pi < \theta \leq -\pi$

folha 2: $-\pi < \theta \leq \pi$

folha 3: $\pi < \theta \leq 3\pi$

folha 4: $3\pi < \theta \leq 5\pi$

Repare que esta é uma função composta, assim devemos primeiramente aplicar $\alpha(z) = z^2$ e depois $\beta(z) = \sqrt[4]{z}$.

Vamos fazer um *loop* em torno do ponto de ramificação $z_0 = 0$ partindo do ponto $z = 1$ na *folha 1*, ou seja, $1 = e^{-2\pi i}$. Os outros casos são similares.

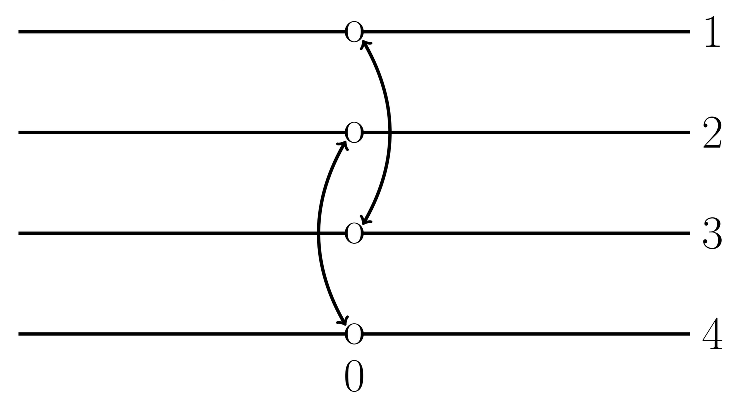
Assim, temos:

$$e^{-2\pi i} \xrightarrow{\alpha} e^{-4\pi i} \xrightarrow{\beta} e^{-\pi i}$$
$$e^{-\pi i} \xrightarrow{\alpha} e^{-2\pi i} \xrightarrow{\beta} e^{-\frac{\pi i}{2}}$$
$$e^{\pi i} \xrightarrow{\alpha} e^{2\pi i} \xrightarrow{\beta} e^{\frac{\pi i}{2}}$$
$$e^{2\pi i} \xrightarrow{\alpha} e^{4\pi i} \xrightarrow{\beta} e^{\pi i}$$

Note que partindo da *folha 1* a fim de dar uma volta completa em torno do ponto de ramificação no *plano z* chegamos a *folha 3*.

Analogamente tem - se *folha 2* para a *folha 4*; *folha 3* para a *folha 1* e *folha 4* para a *folha 2*.

Desta forma para a função $\sqrt[4]{z^2}$ temos o seguinte esquema, com $z_0 = 0$ o único ponto de ramificação:



5. Grupos de Monodromias

Grupo de Monodromia: O grupo de monodromia de uma função algébrica complexa $f(z)$ é o grupo de permutações de seu esquema de Riemann.

Desta maneira temos o grupo $G_1 = \langle(12)\rangle = S_2 \cong \mathbb{Z}_2$ associado a função $\sqrt{z}$ e o grupo $G_2 = \langle(13)(24)\rangle = S_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ associado a função $\sqrt[4]{z^2}$.

Para finalizar vamos trazer o objetivo central deste trabalho, provar os seguinte teoremas:

Teorema: Se uma função complexa de multivalores $h(z)$ é representável por radicais então seu grupo de monodromias é solúvel.

Teorema de Abel: *Para $n \geq 5$ a equação geral de grau n*

$$a_0w^n + a_1w^{n-1} + \cdots + a_{n-1}w + a_n = 0$$

não possui solução expressa por radicais.

Ideia da Demonstração:

Tome a função $f(w) = 3w^5 - 25w^3 + 60w - z$ que possui o S_5 (que não é solúvel) como grupo de monodromia. Pelo teorema anterior sabemos que não podemos representá - la por radicais, portanto não temos um método geral para resolver equações de grau maior ou igual a 5 por radicais.

6. Referências

V.B. Alekseev. *Abel's Theorem in Problems and Solutions. Based on the lectures of Professor V. I. Arnold.* Kluxer Academic Publishers, New York (2004).

CRUZ, H. S. *A Survey on the Monodromy Groups of Algebraic Functions.* [S.l.], 2016. Disponível em: <http://math.uchicago.edu/ may/ REU2016/REUPapers/SantaCruz.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2020.

GARCIA, A.; YVES, L. *Elementos de Álgebra.* 1 a . ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2002.

CAMPUZANO, J. C. P. *Superfície.* [S.l.], 2018. Disponível em: <https://www.geogebra. org/classic/FcN24PZ9>. Acesso em: 10 ago. 2020.