

## Polinômios, Bases de Gröbner e Álgebra Computacional

Autores: Luiz Guilherme de Sá Gontijo, Luís Felipe Gonçalves Fonseca

ODS 9 - Indústria, Inovação e Infraestrutura

Área: Pesquisa

### Introdução

As bases de Gröbner são ferramentas poderosas na álgebra computacional. Introduzidas por Bruno Buchberger em 1965, elas transformam sistemas de equações polinomiais em formas mais simples e sistemáticas, facilitando a resolução de uma ampla gama de problemas. Diversos problemas podem ser modelados como polinômios, sendo dois deles: **Controle de tráfego ferroviário**, onde as regras de movimentação dos trens podem ser modeladas como polinômios, e as bases de Gröbner, utilizadas para garantir uma configuração segura da malha ferroviária, sem risco de colisão entre trens e com horários otimizados; e **cálculo proposicional**, onde as proposições lógicas que compõem teoremas podem ser modeladas como polinômios, e as bases de Gröbner, utilizadas para determinar se um argumento é verdadeiro ou falso, ou se certa expressão lógica é uma contradição ou não.

### Objetivos

O objetivo deste projeto é compreender as bases de Gröbner enquanto ferramenta matemática, estudando os conceitos que as fundamentam e que perguntas podem ser respondidas através delas. Para isso, foram estudadas as aplicações apresentadas no livro *Um Primeiro Contato com Bases de Gröbner e suas Aplicações*, de Marcelo Escudeiro, sendo enfatizados o controle de tráfego ferroviário e o cálculo proposicional.

### Material e Métodos ou Metodologia

O principal método de estudo foi a leitura e fichamento do material bibliográfico, sendo os principais pontos a leitura do livro *Ideals, Varieties, and Algorithms*, da apostila de Introdução à Álgebra de Rui Loja e Manuel Ricou, e do livro *Um Primeiro Contato com Bases de Gröbner e suas Aplicações*, do Marcelo Escudeiro.

Além disso, o bolsista reproduziu os algoritmos de Buchberger em Python, utilizando a biblioteca SymPy, permitindo um estudo prático do conteúdo.

### Apoio Financeiro



### Resultados e/ou Ações Desenvolvidas

- I. Primeiro, foram estudados os fundamentos algébricos necessários, como anéis de polinômios, variedades afins, ideais, anéis noetherianos, Teorema da base de Hilbert, Teorema dos zeros de Hilbert (fraco e forte), entre outros.
- II. Depois, foram estudadas as bases de Gröbner, a divisão de polinômios em  $n$  variáveis, ordens monomiais e os algoritmos de Buchberger, sendo estes últimos reproduzidos em Python pelo bolsista.
- III. Por fim, foram estudadas as aplicações das bases de Gröbner: Suas utilidades cobrem inúmeras áreas, como controle de tráfego ferroviário, cálculo proposicional, problema de satisfabilidade binária, otimização de circuitos, e mais.

### Conclusões

Essencialmente, as bases de Gröbner são utilizadas para determinar se um polinômio pertence ou não a um determinado ideal, e diversos problemas podem ser traduzidos em álgebra e modelados para encaixar neste contexto. Marcelo Escudeiro apresenta em seu livro o controle de tráfego ferroviário e o cálculo proposicional como exemplos, sendo o primeiro interessante por, na maioria das vezes, ter um bom desempenho e ser uma aplicação bem direta; O cálculo proposicional, por sua vez, é uma árvore: Diversos problemas podem ser modelados como proposições, e, por transitividade, resolvidos pelas bases de Gröbner. Exemplos disso são a demonstração de teoremas da geometria euclidiana, a solução de problemas de satisfabilidade booleanos e a otimização de circuitos lógicos digitais.

### Bibliografia

David A. Cox e John Little e Donal O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer, 4 edition, 2015.

Jhone Caldeira Silva e Olimpio Ribeiro Gomes. *Estruturas Algébricas para Licenciatura, Volume 3: Elementos da Álgebra Moderna*. Editora Edgard Blücher Ltda., 1 edition, 2020.

Rui Loja Fernandes e Manuel Ricou. *Introdução à Álgebra*. IST Press, 3 edition, 2018.

Marcelo Escudeiro Hernandes. *Um Primeiro Contato com Bases de Gröbner e suas Aplicações*. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1 edition, 2023.

Repositório GitHub: Algoritmos sobre bases de gröbner.  
<https://github.com/Jon-Lemmon/Algoritmos-sobre-Bases-de-Grobner>, 2025. Acessado em: 27 set. 2025.